

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический университет»
Уральское отделение Российской академии образования
Академия профессионального образования

З.А. Наседкина, А.В. Песков, А.В. Шитиков

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением
по профессионально-педагогическому
образованию в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по специальности 050501.08 Профессиональное обучение
(машиностроение и технологическое оборудование)*

УДК 539.3/6(075.8)

ББК Ж121 я73-1

НЗ1

Наседкина З.А. Сопротивление материалов [Текст]: учеб. пособие/
З.А. Наседкина, А.В. Песков, А.В.Шитиков. Екатеринбург: Изд-во ГОУ
ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2008. 135 с.
ISBN 978-5-8050-0343-2

В учебном пособии изложены основные теоретические положения по некоторым разделам курса «Сопротивление материалов» («Растяжение и сжатие», «Плоское напряженное состояние», «Кручение», «Изгиб», «Сложное сопротивление», «Устойчивость сжатых стержней», «Динамическое действие нагрузок»), приведены решения типовых задач и задания для выполнения контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов инженерно-педагогических специальностей машиностроительного и электроэнергетического профиля.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Ю.П. Байшев (ГОУ ВПО «Уральская государственная архитектурно-художественная академия»); д-р техн. наук, проф. В.В. Каржавин (ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»)

ISBN 978-5-8050-0343-2

© ГОУ ВПО «Российский государственный
профессионально-педагогический
университет», 2008

© Наседкина З.А., Песков А.В.,
Шитиков А.В., 2008

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 5 |
| Глава 1. МЕТОД РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ | 6 |
| 1.1. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня | 7 |
| 1.2. Понятие о напряжении..... | 9 |
| 1.3. Условие прочности по допускаемым напряжениям..... | 10 |
| Вопросы для самоконтроля | 11 |
| Глава 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ..... | 12 |
| 2.1. Статически определимые системы..... | 12 |
| 2.2. Статически неопределимые системы..... | 19 |
| Вопросы для самоконтроля | 24 |
| Глава 3. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ..... | 26 |
| Вопросы для самоконтроля | 33 |
| Глава 4. КРУЧЕНИЕ..... | 35 |
| Вопросы для самоконтроля | 43 |
| Глава 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ..... | 44 |
| Вопросы для самоконтроля | 52 |
| Глава 6. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ..... | 54 |
| 6.1. Расчет на прочность..... | 54 |
| 6.2. Определение перемещений при плоском изгибе..... | 72 |

| | |
|--|------------|
| Вопросы для самоконтроля | 78 |
| Глава 7. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ | 80 |
| Вопросы для самоконтроля | 84 |
| Глава 8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ..... | 85 |
| 8.1. Основные понятия..... | 85 |
| 8.2. Мощность при вращательном движении..... | 87 |
| Вопросы для самоконтроля | 93 |
| Глава 9. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ..... | 94 |
| Вопросы для самоконтроля | 110 |
| Глава 10. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК..... | 111 |
| Вопросы для самоконтроля | 116 |
| Заключение..... | 117 |
| Библиографический список..... | 118 |
| Приложение 1. Указания по выполнению контрольных работ..... | 119 |
| Приложение 2. Перечень контрольных заданий (номера и названия задач)..... | 121 |
| Приложение 3. Значения механических характеристик для различных материалов, МПа | 122 |
| Приложение 4. Геометрические характеристики поперечных сечений..... | 123 |
| Приложение 5. Сортамент прокатной стали..... | 124 |

Введение

Сопротивление материалов – это инженерная наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов машин и конструкций в целом [1 – 5]. Целью преподавания курса «Сопротивление материалов» является ознакомление обучающихся с широким кругом вопросов, связанных с расчетом и проектированием деталей и конструкций, развитием логического мышления. Глубокие и широкие знания по этому предмету необходимы инженеру-педагогу для преподавания своей специальности в профессионально-технических училищах.

Задачи изучения курса «Сопротивление материалов» – освоение теоретических разделов курса по расчету простых и сложных видов деформирования материальных тел и практическое применение методов решения технических задач, охватывающих указанные разделы в объеме учебного плана. Изучение и освоение данного материала должно помочь обучающимся при решении практических задач.

Курс «Сопротивление материалов» базируется на механико-математической и общетехнической подготовке студентов, обеспечиваемой предшествующими курсами, такими как «Высшая математика», «Физика», «Теоретическая механика».

Данное учебное пособие предназначено для оказания помощи в самостоятельной работе студентов при выполнении контрольных работ (прил. 1, 2).

В процессе изучения дисциплины студенты получают общинженерные навыки, создающие базу для последующей специальной подготовки, приобретают умение выполнять проектные расчеты и чертежи, анализировать результаты выполняемого проекта с инженерных позиций.

Глава 1. МЕТОД РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Одной из главных задач курса «Сопротивление материалов», которой следует уделить основное внимание, является расчет на прочность по допускаемым напряжениям. В основе этого метода лежит гипотеза, что прочность конструкции будет обеспечена, если выполнено условие

$$|\sigma_{\text{эв}}|_{\text{max}} \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{\text{эв}}$ – некоторое число, называемое эквивалентным напряжением, приписываемое каждой точке конструкции. Наиболее опасной считается та точка, где модуль этого числа наибольший ($|\sigma_{\text{эв}}|_{\text{max}}$);

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение, определяемое экспериментально найденными характеристиками материала и коэффициентом запаса на прочность. В рассматриваемых ниже задачах $[\sigma]$ можно считать заданным числом.

Неравенство (1) – универсальное условие прочности, справедливое для любых видов статического нагружения и типов конструкций. Основную часть теории сопротивления материалов составляет отыскание способа определения $|\sigma_{\text{эв}}|_{\text{max}}$ при тех или иных видах деформации (растяжение – сжатие, кручение, прямой и косой изгибы, изгиб с кручением и т.д.). Общим для всех имеющихся способов является понятие внутренних сил и напряжений на данной площадке в данной точке.

1.1. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня

Рассмотрим тело, находящееся в состоянии статического равновесия под действием приложенных внешних нагрузок F_i , в том числе и реакций опор (рис. 1, а).

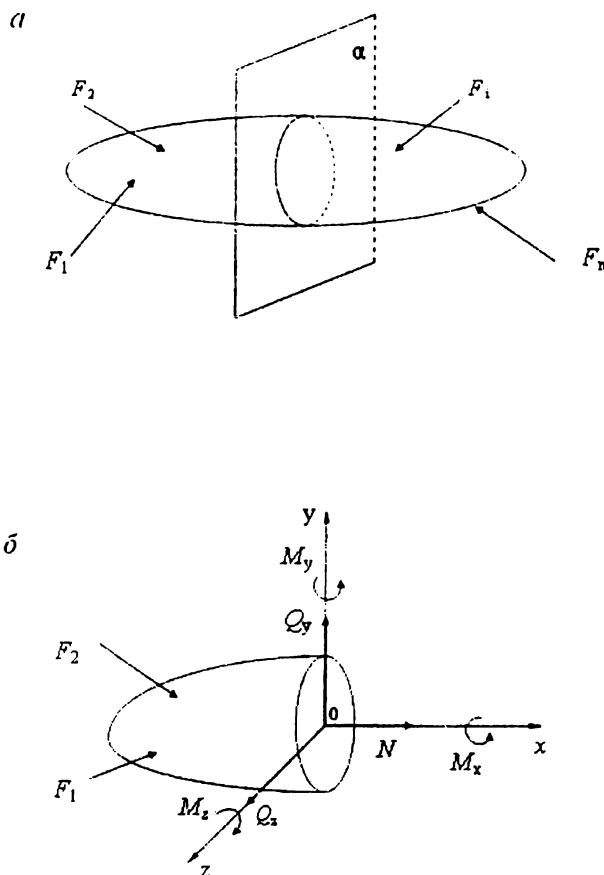


Рис. 1. Определение внутренних усилий методом сечений:

а – рассечение тела плоскостью α ; б – шесть внутренних сил в сечении α

Понятие внутренних сил неразрывно связано с методом сечений для их выявления. Рассечем мысленно наше тело плоскостью α и отбросим одну из частей. Внутренние силы – это силы, заменяющие действие отброшенной части. Это определение требует уточнения. Для того, чтобы все точки тела после его рассечения плоскостью α остались на месте, к каждой элементарной единичной площадке сечения нужно приложить какую-то силу, заменяющую действие отброшенных межмолекулярных связей. Эта сила – напряжение в данной точке на данной площадке. Задача отыскания распределения напряжений по сечению – сложная задача и в сопротивлении материалов решается отдельно для каждого вида деформации. Однако суммарные по сечению характеристики этих сил легко найти из условий статического равновесия отсеченной части.

Введем ортогональную систему координат с центром в центре тяжести сечения. Ось x перпендикулярна к плоскости α , оси y и z – в плоскости α . Шесть независимых уравнений статического равновесия позволяют найти шесть внутренних сил, относящихся к заданному сечению α (рис.1, б) – три компоненты вектора внутренней силы

$\overline{F}_\alpha (N, Q_y, Q_z)$ и три компоненты внутреннего момента $\overline{M}_\alpha (M_x, M_y, M_z)$.

Сила \overline{F}_α и момент \overline{M}_α – это, по существу, суммы всех напряжений в плоскости α и их моментов относительно центра тяжести сечения.

Эти шесть величин мы и будем называть внутренними силами в сечении α . N – проекция силы \overline{F}_α на ось x – внутренняя продольная сила, Q_y и Q_z – внутренние поперечные силы, $M_x = M_k$ – проекция момента \overline{M}_α на ось x – внутренний крутящий момент, M_y и M_z – внутренние изгибающие моменты.

1.2. Понятие о напряжении

Пусть $\Delta \vec{F}$ – внутренняя сила на площадке ΔA (ΔA – это и название площадки, и ее площадь) в плоскости α (рис.2, а). K – внутренняя точка площадки ΔA , тогда

$$\overline{P_{K\alpha}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A},$$

где $\overline{P_{K\alpha}}$ – трехмерный вектор напряжения в точке K на площадке α .

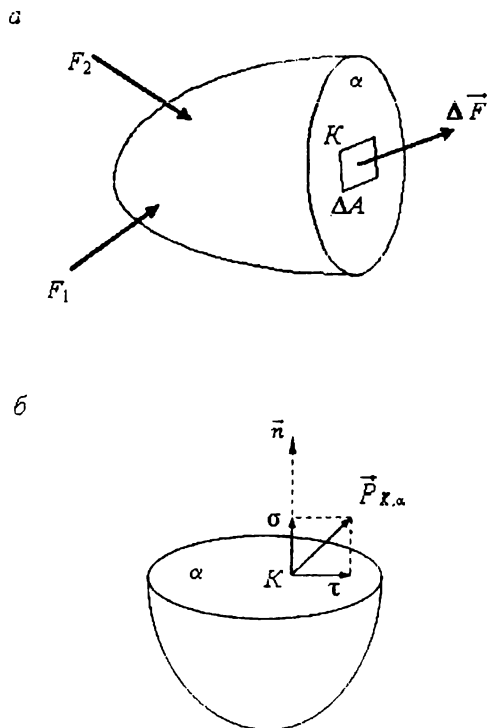


Рис. 2. Нормальное и касательное напряжения в точке:

а – внутренняя сила $\Delta \vec{F}$ на площадке ΔA ; б – полное напряжение $\overline{P_{K\alpha}}$,
нормальное – σ и касательное – τ

Вектор $\vec{P}_{\kappa\alpha}$ можно разложить на нормальную к сечению и тангенциальную составляющие (рис.2, б): $P_{\kappa\alpha} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, где σ – нормальное напряжение, а τ – касательное напряжение в рассматриваемой точке сечения α . В свою очередь, вектор $\vec{\tau}$ может быть разложен на две составляющие. Размерность напряжения $P_{\kappa\alpha} = \text{сила/площадь}$. В системе единиц СИ $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ (паскаль).

1.3. Условие прочности по допускаемым напряжениям

Различные гипотезы прочности позволяют еще больше сократить описание сложного напряженного состояния: для каждой тройки чисел – главных напряжений – необходимо поставить в соответствие одно число, называемое эквивалентным напряжением: $\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Вид функции f зависит от того, какая конкретно гипотеза прочности применяется, но всегда выполняется естественное требование: если только одно из главных напряжений не равно нулю, то оно совпадает с $\sigma_{\text{экв}}$. Считается, что все напряженные состояния, которым отвечает одно и тоже $\sigma_{\text{экв}}$, равноопасны с точки зрения возможного разрушения или течения в рассматриваемом элементе. Отсюда следует универсальное условие прочности:

$$|\sigma_{\text{экв}}|_{\max} \leq [\sigma] = \left| \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n} \right|,$$

где n – коэффициент запаса;

$\sigma_{\text{оп}}$ – опасное напряжение, которое может быть определено из различных экспериментов, например из экспериментов по растяжению или кручению.

Конкретные выражения для функции $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ будут приведены в гл. 8.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие основные задачи рассматриваются в учении о сопротивлении материалов?
2. Дайте определение внутренним усилиям в поперечном сечении стержня.
3. Какие внутренние усилия могут возникать в поперечных сечениях стержня в общем случае нагружения?
4. Что такое метод сечений и для чего он применяется?
5. Что называется напряжением и какую размерность оно имеет?
6. Что называется напряжением нормальным, касательным и полным?
7. Что такое эквивалентное напряжение?
8. Сформулируйте условие прочности по допускаемым напряжениям и напишите его математическое выражение.

.

Глава 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. Статически определимые системы

При растяжении или сжатии в поперечном сечении стержня возникает продольная сила N , которая определяется методом сечений. Величина продольной силы равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на стержень по одну сторону от рассматриваемого сечения. Внешняя сила считается положительной, если она направлена от рассматриваемого сечения, и отрицательной, когда направлена к этому сечению. Это правило относится к продольной силе. Условимся, что вектор N направлен от рассматриваемого сечения. Тогда получаемый в результате подсчета знак укажет на характер деформации: плюс – растяжение, минус – сжатие. Продольная сила связана с нормальными напряжениями σ , которые распределяются по сечению равномерно.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где N – продольная сила, Н;

A – площадь поперечного сечения, м²;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение материала при растяжении или сжатии, Па.

Абсолютная продольная деформация определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

где l – длина стержня, м;

E – модуль продольной упругости материала (модуль Юнга), Па;

$E \cdot A$ – жесткость стержня при растяжении и сжатии, Н.

Отношение абсолютной продольной деформации стержня к его

первоначальной длине называется относительной продольной деформацией ε и рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Закон Гука, связывающий напряжения и деформации, имеет вид

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Рассмотрим статически определимую систему, где для определения внутренних сил в элементах достаточно уравнений статики.

Пример 1

Определить площадь поперечных сечений на всех участках чугунного стержня (рис. 3, а). Построить эпюры продольных сил N , напряжений σ и перемещений δ . Принять для чугуна $[\sigma_c] = 180$ МПа, $[\sigma_p] = 60$ МПа, $E = 10^5$ МПа = 10^{11} Па.

Рассматриваемый стержень имеет одну опорную реакцию R , и для него можно составить лишь одно уравнение статики: $\Sigma Y = 0$. Значит, эта система статически определима:

$$\Sigma Y = R - F_1 + F_2 + F_3 = 0,$$

откуда $R = 1300$ кН.

Стержень подвергается растяжению – сжатию. Выделяем участки нагружения 1 – 4 (между точками приложения внешних сил), в пределах которых намечаются сечения I – IV.

Для определения N_1 на первом участке рассмотрим равновесие части стержня, расположенной ниже сечения I – I. На нее действует реакция R (рис. 4). Уравнение статики $\Sigma Y = 0$ имеет вид

$$\Sigma Y = R + N_1 = 0,$$

$$N_1 = -R = -1300 \text{ кН}.$$

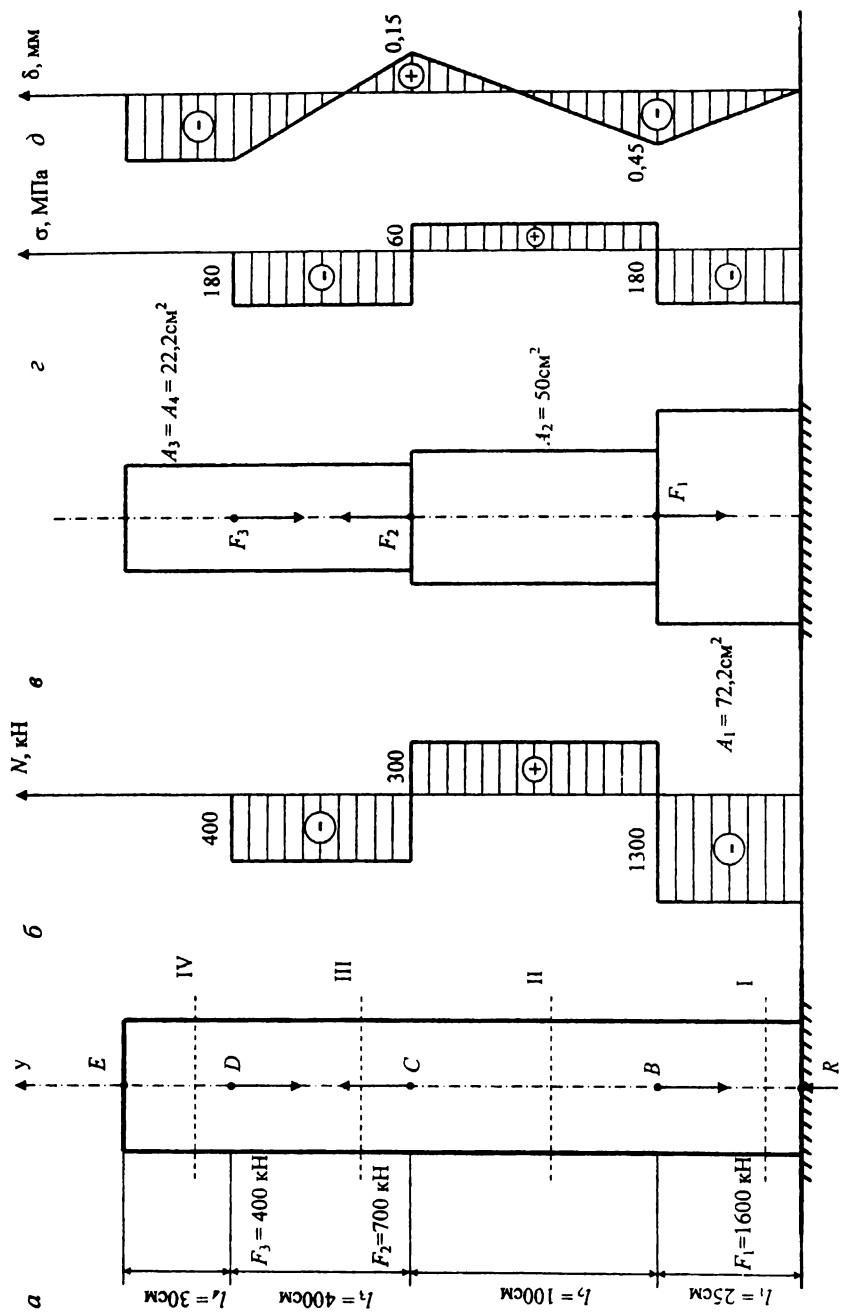


Рис. 3. Построение эпюр внутренних сил N , напряжений σ и перемещений δ

Полученный в результате подсчета знак минус при N_1 указывает, что N_1 имеет направление, противоположное заданному, и что первый участок сжат.

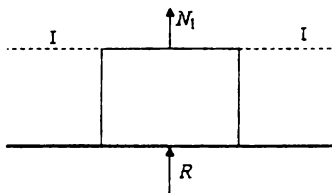


Рис. 4. Определение внутренних сил N_1

На часть стержня, расположенную ниже сечения II — II, действуют реакция R и сила F_1 . Тогда продольная сила в сечении II — II равна

$$N_2 + R - F_1 = 0, \quad N_2 = -R + F_1 = 300 \text{ кН.}$$

Аналогично определяются N_3, N_4 : $N_3 = -400 \text{ кН}$; $N_4 = 0$. По вычисленным значениям N строится эпюра продольных сил (см. рис. 3, б).

Из условия прочности $\sigma_{\text{жв}} = \sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ определяем площади поперечных сечений на участках стержня:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma_c]} = \frac{1300 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 7,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 72,2 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma_p]} = 50 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = A_4 = 22,2 \text{ см}^2.$$

Вычисления сделайте самостоятельно.

Рассчитываемый стержень с найденными площадями поперечных сечений показан на рис.3, в.

Нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1300 \cdot 10^3}{7,22 \cdot 10^{-3}} = 180 \cdot 10^6 \text{ Па} = 180 \text{ МПа} = [\sigma_c];$$

$$\sigma_2 = 60 \text{ МПа} = [\sigma_p]; \quad \sigma_3 = 180 \text{ МПа} = [\sigma_c]; \quad \sigma_4 = 0.$$

Проделанные расчеты напряжений являются проверочными. На рис. 3, з показана эпюра нормальных напряжений. Вычислим деформации участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = -\frac{1300 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{10^{11} \cdot 72,2 \cdot 10^{-4}} = -4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,45 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = 0,6 \text{ мм}; \quad \Delta l_3 = -0,721 \text{ мм}; \quad \Delta l_4 = 0.$$

Перемещение любого сечения стержня равно сумме деформаций участков, расположенных между сечением и опорой.

Перемещение δ_A точки А: $\delta_A = 0$. Перемещение точки В обусловлено деформацией участка I:

$$\delta_B = \Delta l_1 = -0,45 \text{ мм}.$$

Перемещение точки С складывается из деформаций участков I и II:

$$\Delta l_2 = -0,45 + 0,6 = 0,15 \text{ мм}.$$

Перемещение точки D складывается из деформаций участков I, II и III:

$$\delta_D = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,571 \text{ мм}.$$

Перемещение точки E складывается из деформаций участков I, II, III и IV:

$$\delta_E = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = -0,571 \text{ мм}.$$

По вычисленным значениям δ строится эпюра перемещений (см. рис. 3, д).

Задача 1. Растяжение и сжатие (статически определимая система)

Произвести расчет стержня постоянного поперечного сечения (рис. 5) на прочность и жесткость. Материал стержня – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma]$, равным 210 МПа и модулем продольной упругости E , равным 200 ГПа. Данные к задаче приведены в табл. 1.

План решения задачи:

- 1) вычислить продольные силы на участках стержня и построить эпюру N ;
- 2) определить размеры поперечного сечения (сторону квадрата или диаметр);
- 3) вычислить нормальные напряжения на участках стержня и построить эпюру σ по длине стержня;
- 4) вычислить деформацию участков стержня и построить эпюру перемещений δ .

Таблица 1

Данные к задаче 1

| Номер строки | Номер схемы | Нагрузка, кН | | | Длина участков, см | | | Форма сечения |
|--------------|-------------|--------------|-------|-------|--------------------|-------|-------|---------------|
| | | F_1 | F_2 | F_3 | l_1, l_4 | l_2 | l_3 | |
| 1 | I | 1100 | 2100 | 1100 | 110 | 110 | 110 | Круг |
| 2 | II | 1200 | 2200 | 1200 | 120 | 120 | 120 | Квадрат |
| 3 | III | 1300 | 2300 | 1300 | 130 | 130 | 130 | Круг |
| 4 | IV | 1400 | 400 | 1400 | 40 | 140 | 140 | Квадрат |
| 5 | V | 1500 | 500 | 1500 | 50 | 150 | 50 | Круг |
| 6 | VI | 1600 | 600 | 1600 | 160 | 160 | 60 | Квадрат |
| 7 | VII | 1700 | 700 | 1700 | 170 | 70 | 70 | Круг |
| 8 | VIII | 1800 | 800 | 1800 | 180 | 80 | 80 | Квадрат |
| 9 | IX | 1900 | 900 | 1900 | 90 | 190 | 90 | Круг |
| 0 | X | 2000 | 1000 | 2000 | 100 | 200 | 100 | Квадрат |
| - | в | а | б | в | а | б | в | в |

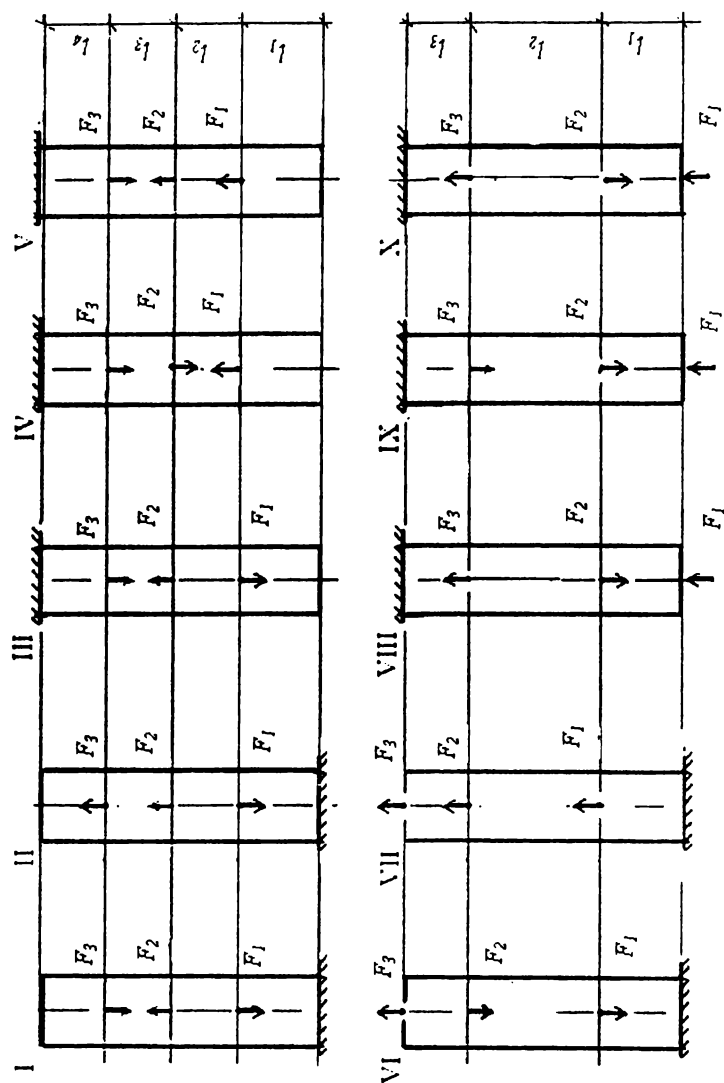


Рис. 5. Схемы стержней к задаче 1

2.1. Статически неопределимые системы

Системы, внутренние силы в элементах которых невозможно определить при помощи лишь одних уравнений статики, называются статически неопределимыми. Такие системы имеют «лишние» связи: внешние (опорные) или внутренние. Будем рассматривать только внешние статически неопределимые системы.

Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных реакций (связей) и числом независимых уравнений статики. Для раскрытия статической неопределимости к уравнениям статики нужно составить столько дополнительных уравнений, сколько раз статически неопределима система. Эти дополнительные уравнения составляются из условий совместности деформаций.

Существуют несколько методов раскрытия статической неопределимости. Наиболее простой – метод сравнения перемещений (деформаций). Суть этого метода заключается в сравнении перемещений (деформаций) от заданной нагрузки и от реакции опоры в односкатных системах и сопоставлении деформаций стержней в многоскатных системах. Раскрытие статической неопределимости для одиночных стержней, работающих на растяжение-сжатие, кручение и изгиб, однотипно. Для ведения расчета выбирается основная система, которая получается из заданной путем удаления лишних связей и, следовательно, является статически определимой (основная система, нагруженная внешними силами и неизвестной реакцией, соответствующей удаленной связи, называется эквивалентной системой). Затем составляется дополнительное уравнение, которое характеризует перемещение (деформацию) в сечении, где удалена связь.

Пример 2

Раскрыть статическую неопределимость ступенчатого стержня, изготовленного из стали Ст3 (рис. 6, а) и построить эпюру продольных сил. Модуль упругости материала стержня E равен 200 ГПа (прил. 3).

Стержень имеет две неизвестные опорные реакции C и B (направляем произвольно). Уравнение статики можно составить только одно:

$$\Sigma Y = C + F_2 - F_1 + B = 0.$$

Таким образом, система один раз статически неопределима. Основную систему получим, удалив связь, принадлежащую, например, опоре B . Эквивалентная система показана на рис. 6, б.

В сечении B заданной системы перемещение равно нулю. Значит, и в эквивалентной системе должно выполняться это условие $\delta_B = 0$. Это и есть дополнительное уравнение. Для раскрытия его используем принцип независимости действия сил. Перемещение сечения B равно алгебраической сумме деформации всех участков стержня, вычисленных от каждой силы в отдельности.

Рассматривая эквивалентную систему, заметим, что реакция B сжимает все участки стержня, сила F_1 растягивает участки II, III и IV, а сила F_2 сжимает участок IV.

$$\delta_B = -\frac{B(l_1 + l_2)}{E \cdot A_1} - \frac{B(l_3 + l_4)}{E \cdot A_3} + \frac{F_1 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{F_1(l_3 + l_4)}{E \cdot A_3} - \frac{F_2 \cdot l_4}{E \cdot A_4} = 0;$$

$$E\delta_B = -\frac{B(0,6 + 1,0)}{20 \cdot 10^{-4}} - \frac{B(0,4 + 0,8)}{10 \cdot 10^{-4}} + \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{20 \cdot 10^{-4}} + \frac{100 \cdot 10^3 (0,4 + 0,8)}{10 \cdot 10^{-4}} - \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{10 \cdot 10^{-4}} = 0,$$

откуда $B = 61 \cdot 10^3 \text{ Н} = 61 \text{ кН}$ (направление совпадает с выбранным).

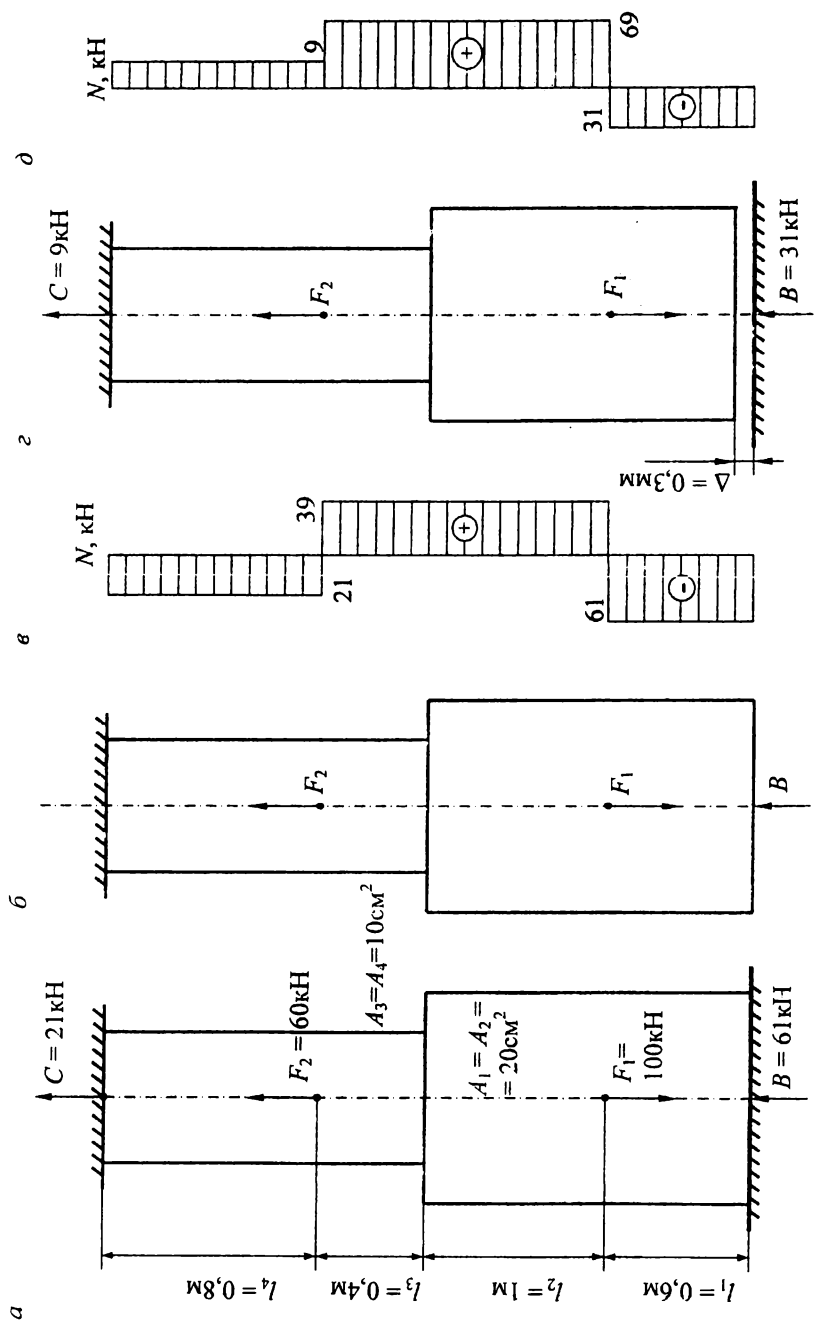


Рис. 6. Эпюры нормальных сил N для статически неопределимого строения

Опорную реакцию C определим из уравнения статики:

$$C + 60 - 100 + 61 = 0,$$

откуда $C = -21$ кН (направление обратное).

Эпюра продольных сил N , построенная обычным образом (см. прим. 1), показана на рис. 6, в.

Опорную реакцию C можно определить аналогично реакции B , а уравнение статики – использовать для проверки правильности вычислений. Прodelайте это самостоятельно.

Если рассматриваемый стержень вследствие неточности изготовления не будет достигать опоры на величину Δ (рис. 6, г), то дополнительное уравнение примет вид $\delta_B = \Delta$. На рис. 6, д показана эпюра N при $\Delta = 0,03$ см.

Задача 2. Растяжение и сжатие **(статически неопределимая система)**

Для бруса (рис. 7), изготовленного из стали 40, необходимо:

- 1) построить эпюры N , σ и δ ;
- 2) определить запас прочности n .

Данные к задаче приведены в табл. 2.

План решения задачи:

- 1) определить степень статической неопределимости системы;
- 2) раскрыть статическую неопределимость системы (определяются опорные реакции);

- 3) построить эпюры N , σ и δ ;

- 4) определить запас прочности из выражения $n = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\max}}$.

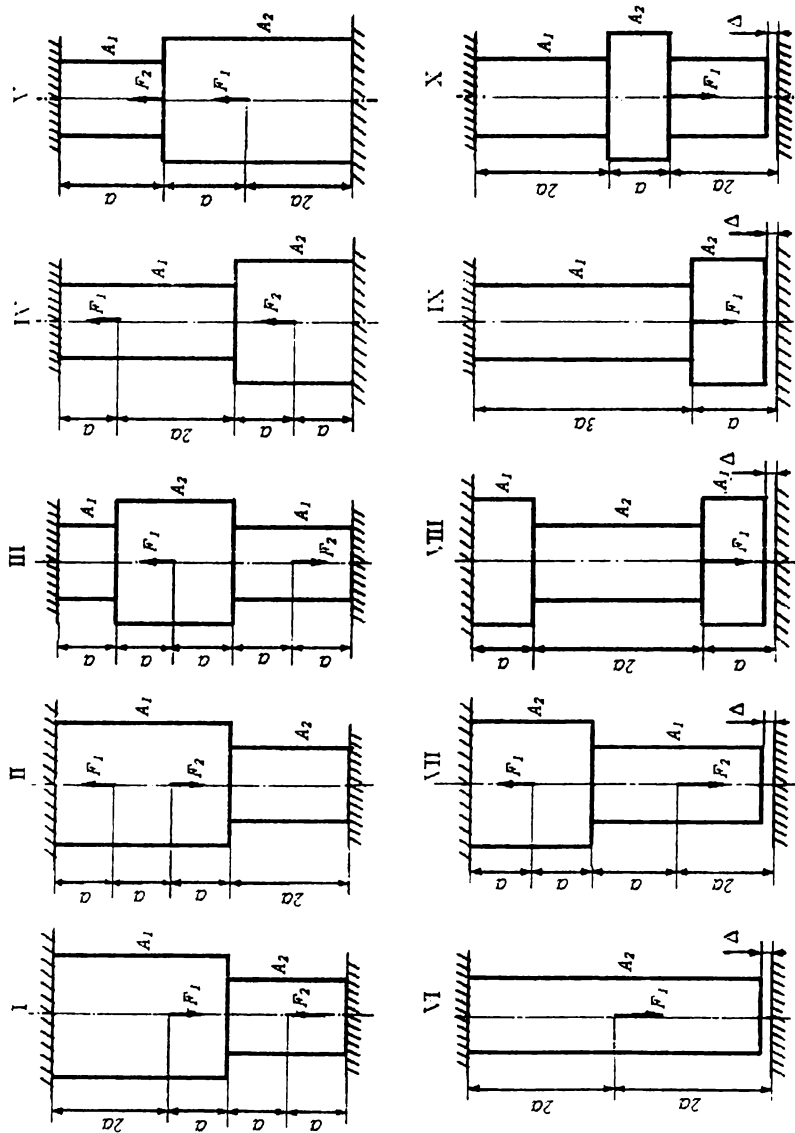


Рис. 7. Схемы стержней к задаче 2

Таблица 2

Данные к задаче 2

| Номер строки | Номер схемы | Нагрузка, кН | | Площадь поперечного сечения, см ² | | Зазор Δ , мм |
|--------------|-------------|--------------|-------|--|-------|---------------------|
| | | F_1 | F_2 | A_1 | A_2 | |
| 1 | I | 100 | 100 | 10 | 20 | 0,5 |
| 2 | II | 100 | 100 | 10 | 20 | 0,4 |
| 3 | III | 100 | 200 | 20 | 10 | 0,3 |
| 4 | IV | 100 | 200 | 10 | 20 | 0,2 |
| 5 | V | 100 | 300 | 10 | 10 | 0,3 |
| 6 | VI | 100 | 200 | 20 | 20 | 0,1 |
| 7 | VII | 100 | 300 | 20 | 10 | 0,2 |
| 8 | VIII | 100 | 200 | 10 | 20 | 0,3 |
| 9 | IX | 100 | 200 | 20 | 20 | 0,4 |
| 0 | X | 200 | 300 | 10 | 20 | 0,5 |
| – | в | в | а | б | в | б |

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется эпюрой внутреннего усилия и для чего она строится?
2. Какое правило знаков принято для продольной силы?
3. Как вычисляют нормальные напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?

4. Что называется абсолютным и относительным удлинением и какова их размерность?

5. Как формулируется закон Гука?

6. Какие системы называют статически неопределимыми? Каков порядок их решения?

7. Как записывается условие прочности растянутого стержня по методу допускаемых напряжений?

8. Можно ли в сопротивлении материалов переносить силу по линии ее действия?

9. Что называется пределами пропорциональности, упругости, текучести, прочности и какова их размерность?

10. По какой эпюре можно найти опасное сечение?

11. В чем состоит расчет стержня на прочность и на жесткость?

Глава 3. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Для исследования напряженного состояния в точке деформируемого тела в ее окрестности выделяют элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 8).

В общем случае деформирования напряженное состояние в точке характеризуется девятью величинами: тремя нормальными напряжениями σ_x , σ_y и σ_z и шестью касательными напряжениями – τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{yx} , τ_{zy} .

Вследствие закона парности касательных напряжений ($\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) число независимых компонентов уменьшается до шести.

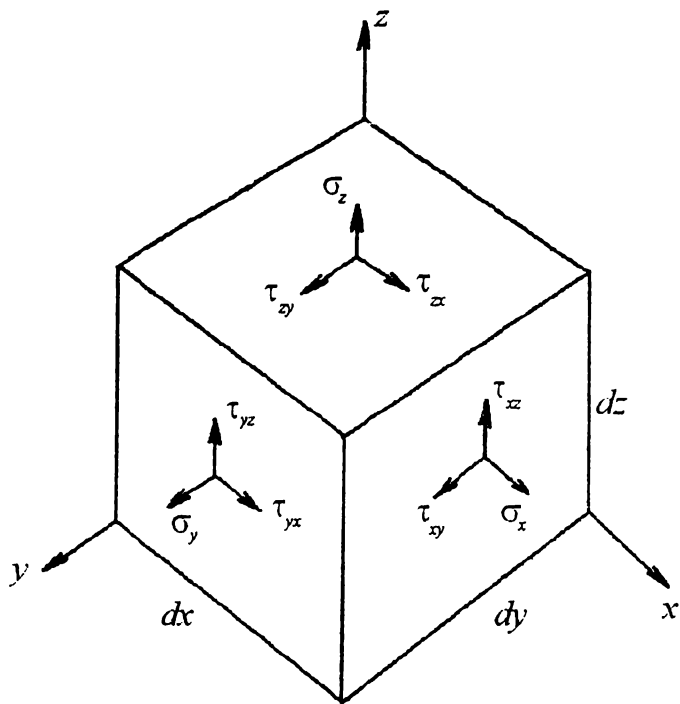


Рис. 8. Объемное напряженное состояние

Исследование напряженного состояния включает определение напряжений по произвольной площадке, проходящей через данную точку, а также положение главных площадок и значений главных нормальных напряжений. Среди бесконечно большого числа площадок, проходящих через данную точку тела, всегда найдутся по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки носят название главных площадок, а нормальные напряжения на них – главных нормальных напряжений. Напряженное состояние в любой точке можно свести к растяжению или сжатию по одному, двум или трем взаимно перпендикулярным направлениям. В зависимости от этого различают линейное, плоское и объемное напряженное состояние (рис. 9).

Очень важно уметь определять значения главных нормальных напряжений в случае плоского напряженного состояния, которое наиболее часто встречается в бруске, подвергающемся действию изгибающих, скручивающих и растягивающих нагрузок, а также в тонкостенных оболочках.

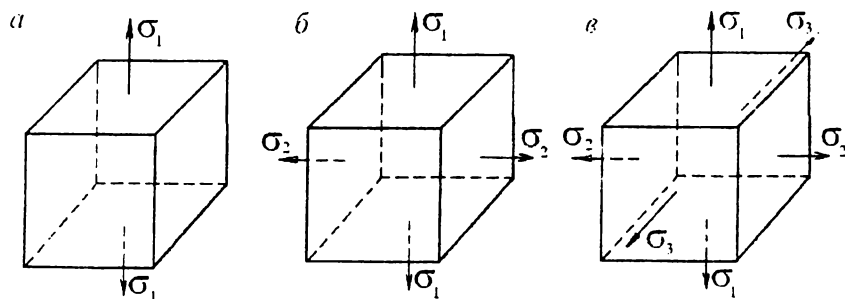


Рис. 9. Виды напряженного состояния:

a – линейное; *b* – плоское; *v* – объемное

Пример 3

Исследовать плоское напряженное состояние стального кубика (рис. 10, а).

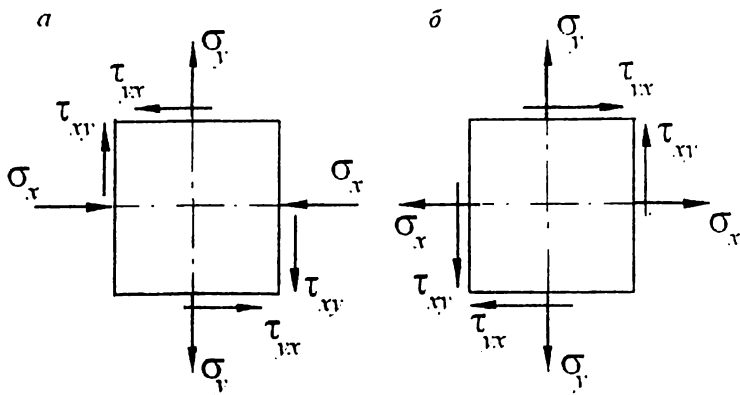


Рис. 10. Нормальные и касательные напряжения по граням кубика:

а – направления напряжений для исследуемого напряженного состояния;

б – положительные направления напряжений

Абсолютные величины напряжений (см. рис. 10, а):

$\sigma_x = 100$ МПа; $\sigma_y = 70$ МПа; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 50$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,25$.

Прежде всего установим знаки нормальных и касательных напряжений, показанных на рис. 10, а. Положительные направления нормальных напряжений σ_x , σ_y и касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ показаны на рис. 10, б. Нормальные растягивающие напряжения принято брать со знаком плюс, а сжимающие – со знаком минус. Следовательно, $\sigma_x = -100$ МПа и $\sigma_y = 70$ МПа, $\tau_{xy} = -50$ МПа.

Определение главных напряжений. Наибольшее σ_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + 0,5\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{-100 + 70}{2} + 0,5 \cdot \sqrt{(-100 + 70)^2 + 4 \cdot 50^2} = 83,6 \text{ МПа};\end{aligned}$$

наименьшее из главных напряжений σ_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - 0,5\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= -15 - 98,6 = -113,6 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Определение направления главных площадок. Угол наклона нормали главной площадки к оси X определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \left| \frac{-2 \cdot 50}{-100 - 70} \right| = 0,588;$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg} 0,588 = 30^\circ 30'; \quad \alpha = 15^\circ 15'.$$

Знак касательных напряжений и угла α можно не устанавливать, если пользоваться следующим правилом для определения ориентации главных площадок.

Главные площадки, на которых действует наибольшее из главных напряжений σ_1 , получаются поворотом на угол α тех из исходных площадок, на которых действует большее (по алгебраической величине) из исходных напряжений σ_x , σ_y . В нашем примере такими исходными площадками будут площадки, где действует нормальное напряжение σ_y , так как $\sigma_y > \sigma_x$.

Направление поворота указывает стрелка касательного напряжения на исходной площадке (рис. 11). Вторая пара главных площадок перпендикулярна найденным.

Определение максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 98,6 \text{ МПа.}$$

Эти напряжения действуют на площадках, наклоненных под углом 45° к главным, и направлены в сторону σ_1 (см. рис. 11).

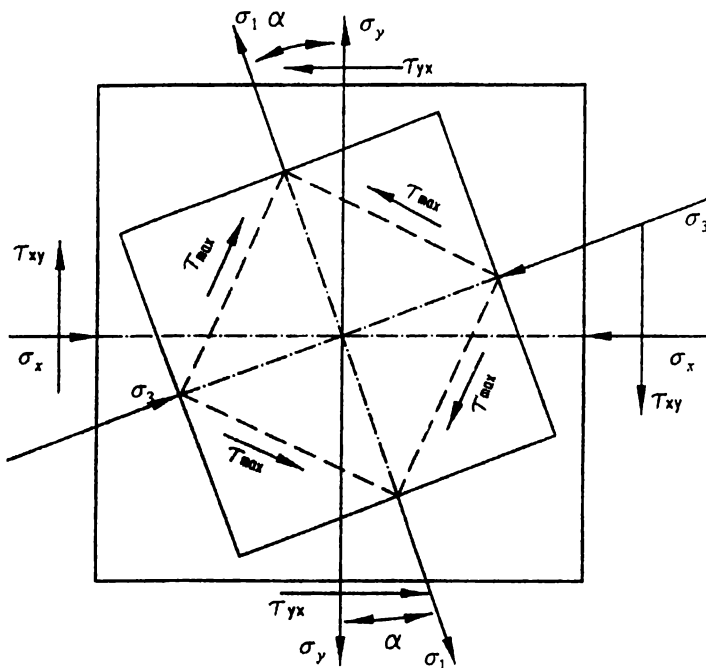


Рис. 11. Расположение главных площадок

Определение относительных деформаций ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{-100 - 0,25 \cdot 70}{2 \cdot 10^5} = -5,84 \cdot 10^{-4};$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{70 - 0,25 \cdot (-100)}{2 \cdot 10^5} = 4,75 \cdot 10^{-4};$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{-0,25 \cdot (-100 + 70)}{2 \cdot 10^5} = 0,375 \cdot 10^{-4}.$$

Обратите внимание на то, что при $\sigma_z = 0$ $\epsilon_z \neq 0$, т.е. при отсутствии напряжения по оси Z деформация в этом направлении имеет место.

Определение относительного изменения объема θ :

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-5,84 + 4,75 + 0,375) \cdot 10^{-4} = -0,715 \cdot 10^{-4}.$$

Определение удельной потенциальной энергии деформаций. Потенциальная энергия изменения объема $U_{об}$:

$$U_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \frac{1-2 \cdot 0,25}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} (-100 + 70)^2 = 0,375 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}.$$

Потенциальная энергия изменения формы U_{ϕ} :

$$U_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_x \cdot \sigma_z - \sigma_y \cdot \sigma_z) = \\ = \frac{1+0,25}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} (10000 + 4900 + 7000) = 45,625 \cdot 10^{-3} \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)}.$$

Полная энергия U :

$$U = U_{об} + U_{\phi} = 46 \cdot 10^{-3} = 46 \cdot 10^{-3} \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)}.$$

Задача 3. Плоское напряженное состояние

Исследовать плоское напряженное состояние (рис. 12). Данные к задаче приведены в табл. 3.

План решения задачи:

- 1) найти главные напряжения и направления главных площадок;
- 2) вычислить максимальные касательные напряжения;
- 3) определить относительные деформации;
- 4) найти относительное изменение объема;
- 5) найти удельную потенциальную энергию деформаций.

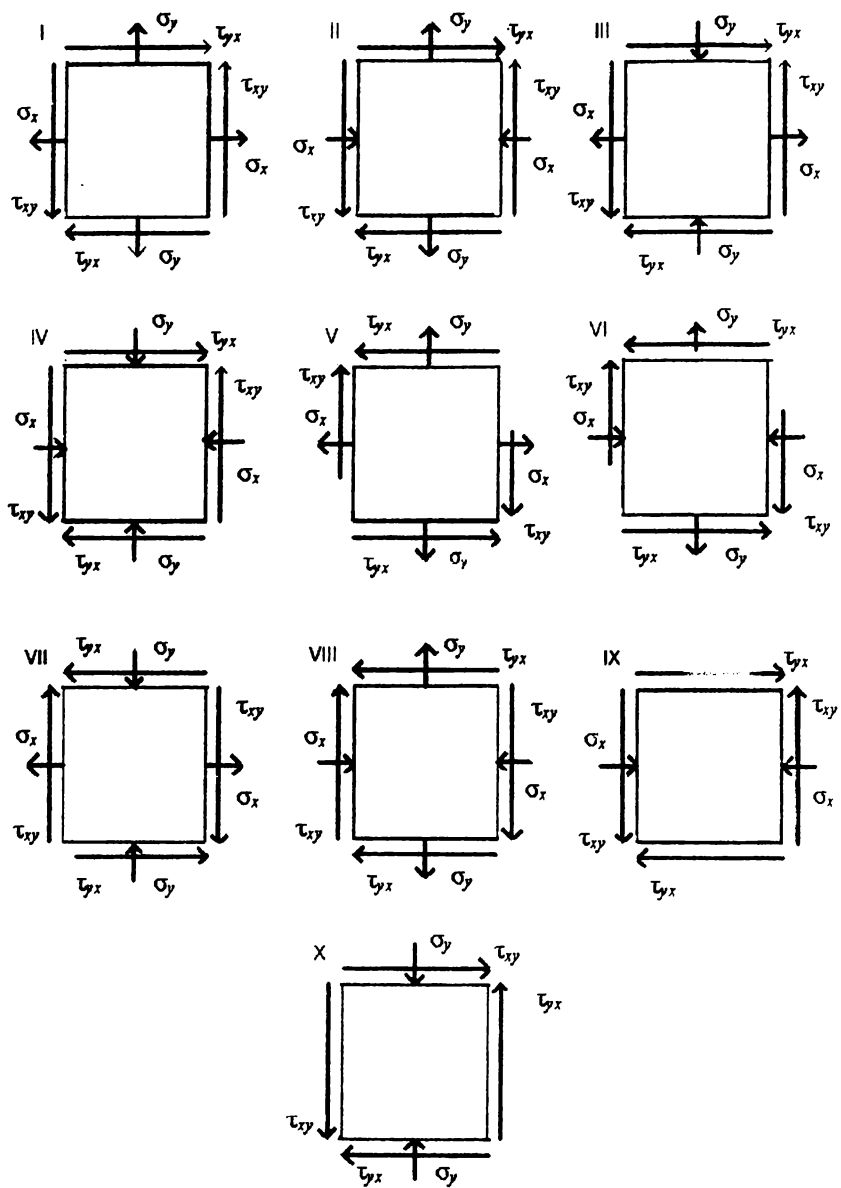


Рис. 12. Схемы к задаче 3

Данные к задаче 3

| Номер строки | Номер схемы | σ_x , МПа | σ_y , МПа | τ_{xy} , МПа |
|--------------|-------------|------------------|------------------|-------------------|
| 1 | I | 10 | 10 | 10 |
| 2 | II | 20 | 20 | 20 |
| 3 | III | 30 | 30 | 30 |
| 4 | IV | 40 | 40 | 40 |
| 5 | V | 50 | 50 | 50 |
| 6 | VI | 60 | 60 | 60 |
| 7 | VII | 70 | 70 | 70 |
| 8 | VIII | 80 | 80 | 80 |
| 9 | IX | 90 | 90 | 90 |
| 0 | X | 100 | 100 | 100 |
| – | в | а | б | в |

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое напряженное состояние в точке?
2. Дайте понятие главных напряжений и трех основных видов напряженного состояния.
3. Чему равны касательные напряжения в главных площадках?
4. Как устанавливаются величины главных напряжений и положение главных площадок для плоского напряженного состояния?

5. Как расположены площадки с напряжениями τ_{\max} и как они выражаются через главные напряжения?

6. Как связаны относительные линейные и объемная деформации в точке?

7. Напишите выражения удельной потенциальной энергии деформации в общем случае напряженного состояния в точке.

8. Что называется коэффициентом поперечной линейной деформации?

9. Как определяется линейная деформация при трехосной нагрузке?

10. Как формулируется закон парности касательных напряжений?

Глава 4. КРУЧЕНИЕ

При кручении в поперечном сечении стержня возникает крутящий момент M_k . Нагрузкой при кручении являются скручивающие моменты m_i , действующие относительно продольной оси стержня. Крутящий момент определяется методом сечений и равен алгебраической сумме внешних (скручивающих) моментов, действующих на рассматриваемую часть стержня: $M_k = \sum m_i$. Момент считается положительным, если он направлен против хода часовой стрелки (при взгляде со стороны сечения).

При кручении в поперечном сечении стержня возникают касательные напряжения τ . Касательные напряжения τ распределяются по площади круглого поперечного сечения стержня неравномерно, нарастая от оси вала к поверхности по линейному закону, наибольшие напряжения возникают по контуру сечения. Закон распределения напряжений τ вдоль произвольного радиуса в сечении изображен на рис. 13. Во всех точках окружности радиуса ρ напряжение $\tau = \text{const}$ и направлено по касательной к этой окружности. Напряжения τ в сечении сводятся к крутящему моменту M_k (рис.13):

$$M_k = \int_A \tau dA \rho.$$

Формула для определения τ имеет вид

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \rho,$$

где I_p – полярный момент инерции сечения, м^4 ; для сплошного круглого сечения $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ (прил. 4);

M_k – крутящий момент, Н·м.

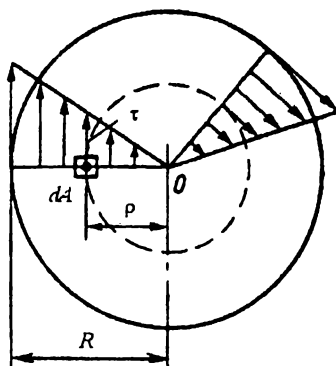


Рис. 13. Распределение касательных напряжений
в сечении при кручении

Условие прочности имеет следующий вид:

$$\frac{\sigma_{\text{экв}}}{2} = \tau_{\text{max}} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_k] = \frac{[\sigma_p]}{2},$$

где $W_p = \frac{I_p}{\rho_{\text{max}}}$ – геометрическая характеристика прочности при кручении,

называемая полярным моментом сопротивления, м^3 ;

$[\tau_k]$ – допускаемое напряжение на кручение, Па.

Для сплошного круглого сечения (рис. 14)

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

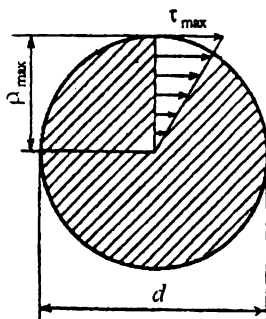


Рис.14. К определению полярного момента сопротивления W_p
для сплошного круглого сечения

Для полого толстостенного цилиндра (рис. 15)

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^4 / 32 - \pi \cdot d^4 / 32}{D / 2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

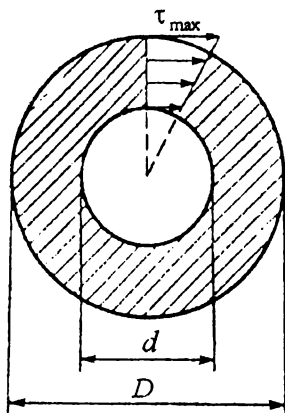


Рис. 15. К определению полярного момента сопротивления W_p
для полого толстостенного цилиндра

Деформация при кручении характеризуется углом закручивания на единицу длины стержня θ :

$$\theta = \frac{\varphi}{l}.$$

Величина θ называется относительным углом закручивания и имеет размерность рад/м.

Условие жесткости имеет вид

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{G \cdot I_p} \leq [\theta],$$

где G – модуль упругости материала при сдвиге, Па.

Зависимость между модулями упругости E и G имеет вид

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

где μ – коэффициент Пуассона;

$[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания на единицу длины стержня (рад/м).

Диаметр стержня, работающего на кручение, определяется из двух условий: прочности и жесткости. Во внимание берется наибольший диаметр. Окончательное значение его принимается согласно стандарту.

Пример 4

Определить диаметры поперечных сечений участков стержня (вала) (рис. 16, а), если $[\tau_k] = 100 \text{ МПа}$, $G = 80 \text{ ГПа}$, $[\theta] = 1,5^\circ/\text{м}$. Построить эпюру углов поворота сечений φ .

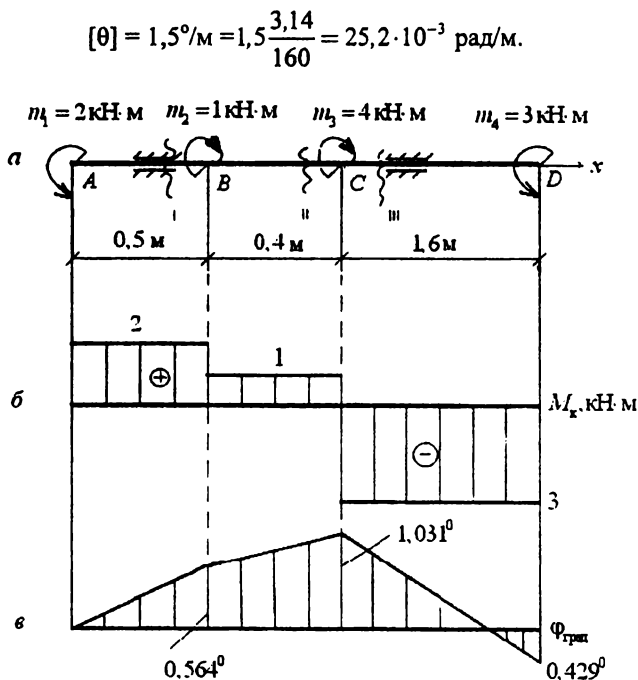


Рис.16. Построение эпюр крутящих моментов M_k

и углов поворота сечений φ :

а – расчетная схема; б – эпюра крутящих моментов M_k ;

в – эпюра углов поворота сечений φ

Должно выполняться условие равновесия $\sum m_x = 0$:

$$\sum m_x = m_1 - m_2 - m_3 + m_4 = 2 - 1 - 4 + 3 = 0.$$

Для определения крутящих моментов M_k на участках стержня будем рассматривать левую часть его.

Участок I: $M_{KI} = m_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Участок II: $M_{KII} = m_1 - m_2 = 2 - 1 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Значение M_{KIII} определите самостоятельно ($M_{KIII} = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}$).

По вычисленным значениям M_k строится эпюра (см. рис. 16, б).

Преобразуем условия прочности и жесткости к виду, удобному для определения диаметра стержня.

Условие прочности:

$$\tau = \frac{M_k}{W_p} = \frac{16M_k}{\pi d^3} \leq [\tau_k], \quad d = \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau_k]}}.$$

Условие жесткости:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot M_k}{G \cdot \pi \cdot d^4} \leq [\theta],$$

откуда

$$d' = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}}.$$

Вычисляем диаметр вала из условий прочности и жесткости.

На первом участке:

– диаметр вала из условия прочности

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{0,112 \cdot 10^{-3}} = 0,467 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 4,67 \text{ см};$$

– диаметр вала из условия жесткости

$$d'_1 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 26,2 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt[4]{0,0972 \cdot 10^{-3}} = 0,558 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 5,58 \text{ см}.$$

Принимаем $d_1 = 6 \text{ см}$.

На втором участке:

– диаметр вала из условия прочности

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,37 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 3,71 \text{ см};$$

– диаметр вала из условия жесткости

$$d'_2 = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 26,2 \cdot 10^{-3}}} = 0,47 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 4,70 \text{ см}.$$

Принимаем $d_2 = 5 \text{ см}$.

Диаметр поперечного сечения на участке III рассчитайте самостоятельно ($d_3 = 5,35 \text{ см}$, $d'_3 = 6,18 \text{ см}$, принимаем $d_3 = 7 \text{ см}$).

Если стержень имеет постоянное сечение, то диаметр его определяется исходя из максимального значения M_K .

Определим деформации участков стержня:

$$\varphi_1 = \frac{M_{K1} \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 6^4 \cdot 10^{-8}} = 9,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,564^\circ.$$

Значения φ на других участках следующие:

$$\varphi_2 = 8,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,467^\circ; \quad \varphi_3 = -26,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -1,46^\circ.$$

Углы поворота характерных сечений (границ участков) равны:

$$\varphi_A = 0; \quad \varphi_B = \varphi_1 = 0,564^\circ;$$

$$\varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,564 + 0,467 = 1,031^\circ.$$

Значение φ_D определите самостоятельно ($\varphi_D = -0,429^\circ$).

Эпюра углов поворота сечений показана на рис. 16, в.

Вычислим максимальные напряжения на участках стержня:

$$\tau_1 = \frac{M_{K1}}{W_{p1}} = \frac{16 M_{K1}}{\pi d_1^3} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6^3 \cdot 10^{-6}} = 47,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = 40,8 \text{ МПа} < [\tau_K]; \quad \tau_3 = 44,6 \text{ МПа} < [\tau_K].$$

Вычисленные значения диаметров участков стержня обеспечивают его прочность и жесткость.

Задача 4. Кручение стержней с круглым сечением:

Произвести расчет стального вала (рис. 17). Данные к задаче приведены в табл. 4.

План решения задачи:

- 1) построить эпюры крутящих моментов;
- 2) определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до нормального размера (считать $[\tau_K]=100$ МПа);
- 3) определить диаметр вала из расчета на допускаемый угол закручивания (принять $[\theta]=2^\circ$ на один погонный метр);
- 4) построить эпюру углов закручивания.

Таблица 4

Данные к задаче 4

| Номер строки | Номер схемы | Расстояние, м | | | Момент, кН·м | | |
|--------------|-------------|---------------|----------|----------|--------------|-------|-------|
| | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | M_1 | M_2 | M_3 |
| 1 | I | 1,1 | 1,1 | 1,1 | 1,1 | 1,1 | 1,1 |
| 2 | II | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 |
| 3 | III | 1,3 | 1,3 | 1,3 | 1,3 | 1,3 | 1,3 |
| 4 | IV | 1,4 | 1,4 | 1,4 | 1,4 | 1,4 | 1,4 |
| 5 | V | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| 6 | VI | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 0,6 | 1,6 |
| 7 | VII | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 0,7 | 1,7 |
| 8 | VIII | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 0,8 | 1,8 |
| 9 | IX | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 0,9 | 1,9 |
| 0 | X | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 1,0 | 2,0 |
| – | в | а | б | в | а | б | в |

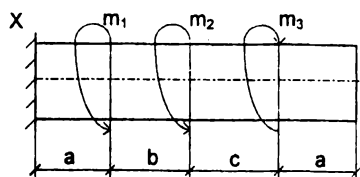
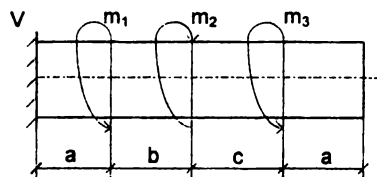
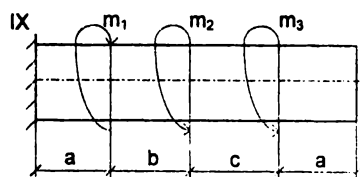
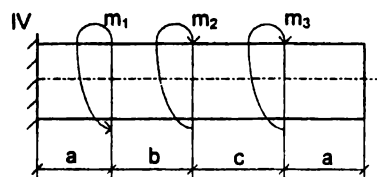
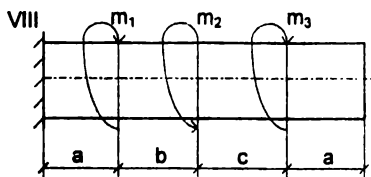
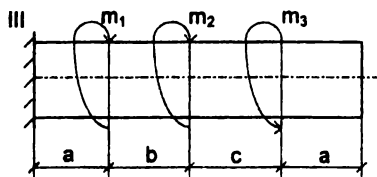
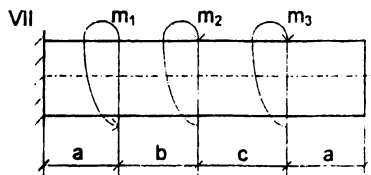
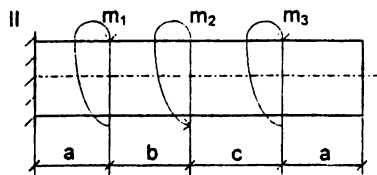
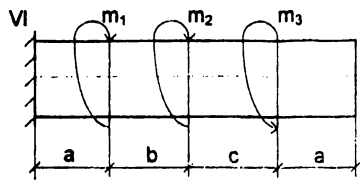
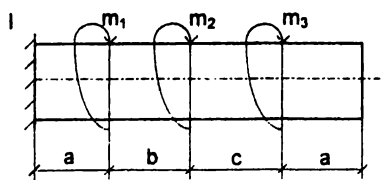


Рис. 17. Схемы к задаче 4

Вопросы для самоконтроля

1. При какой нагрузке на брус получается деформация, называемая кручением?
2. Какая зависимость существует между модулями упругости G и E ?
3. Что называется крутящим моментом?
4. Как распределяются касательные напряжения по площади круглого сечения при кручении?
5. Как выражаются касательные напряжения при кручении через величину крутящего момента?
6. Как определяются относительный и абсолютный углы закручивания вала?
7. Какая существует дифференциально-интегральная зависимость между τ , M_k , φ , θ ?
8. В чем состоит расчет на прочность и жесткость валов?
9. Что такое момент сопротивления сечения при кручении? В чем состоит условие прочности?
10. Как найти диаметр сечения вала, удовлетворяющего условиям прочности и жесткости?
11. Как формулируется закон Гука при сдвиге?

Глава 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Любое плоское сечение характеризуется рядом геометрических характеристик: площадью, координатами центра тяжести, статическим моментом, моментом инерции и др.

Статические моменты относительно осей x и y равны:

$$S_x = \int_A y \, dA, \quad S_y = \int_A x \, dA.$$

Статические моменты обычно выражаются в кубических сантиметрах или метрах и могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*. Формулы для определения координат центра тяжести x_c и y_c сложного сечения, разбитого на простейшие составные части, для которых известны площади A_i и положение центра тяжести x_{ci} и y_{ci} , имеют вид

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i \cdot x_{ci}}{\sum A_i}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_{ci}}{\sum A_i}.$$

Величина момента инерции характеризует сопротивляемость стержня деформации (кручения, изгиба) в зависимости от размеров и формы поперечного сечения. Различают моменты инерции:

- осевые, определяемые интегралами вида

$$I_x = \int_A y^2 \, dA, \quad I_y = \int_A x^2 \, dA;$$

- полярный

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA;$$

- центробежный

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA.$$

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны и не

обращаются в нуль. Полярный момент инерции I_p равен сумме осевых моментов инерции I_x и I_y относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей x и y :

$$I_x + I_y = I_p = \text{const.}$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Размерность моментов инерции – см^4 или м^4 . Формулы для определения моментов инерции простых сечений относительно центральных осей приведены в справочниках. При вычислении моментов инерции сложных сечений часто используют формулы перехода от центральных осей простых сечений к другим осям, параллельным центральным.

$$I_x = I_{x_1} + A \cdot m^2; \quad I_y = I_{y_1} + A \cdot n^2; \quad I_{xy} = I_{x_1 y_1} + A \cdot m \cdot n,$$

где $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}$ – моменты инерции простых сечений относительно центральных осей;

m, n – расстояния между осями (рис. 18).

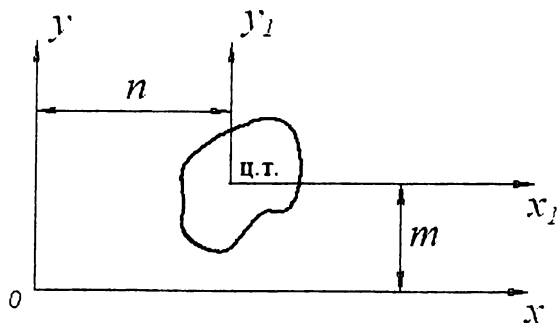


Рис. 18. К определению моментов инерции относительно осей, параллельных центральным

Важное значение имеют главные центральные оси сечения. Главными центральными называются две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения. Главные моменты инерции обозначаются $I_{u(\max)}$ и $I_{v(\min)}$ и определяются по формуле

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left[(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right].$$

Положение главных осей определяется углом α_0 , который находится из формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

Угол α_0 откладывается от оси с большим неглавным моментом инерции; положительное значение – против часовой стрелки.

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось является главной. Другая главная ось перпендикулярна оси симметрии. На практике часто используются сечения, составленные из нескольких прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок). Геометрические характеристики этих профилей приведены в таблицах сортамента. Для неравнобокого и равнобокого уголков центробежный момент инерции относительно центральных осей, параллельных полкам, определяется по формуле

$$I_{xy} = \pm \sqrt{(I_x - I_{\min}) \cdot (I_y - I_{\min})}.$$

Обратите внимание на обозначение главных центральных осей в таблице сортамента для уголков. Знак I_{xy} для уголка зависит от положения его в сечении. На рис.19 показаны возможные положения уголка в сечении и приведены знаки для I_{xy} .

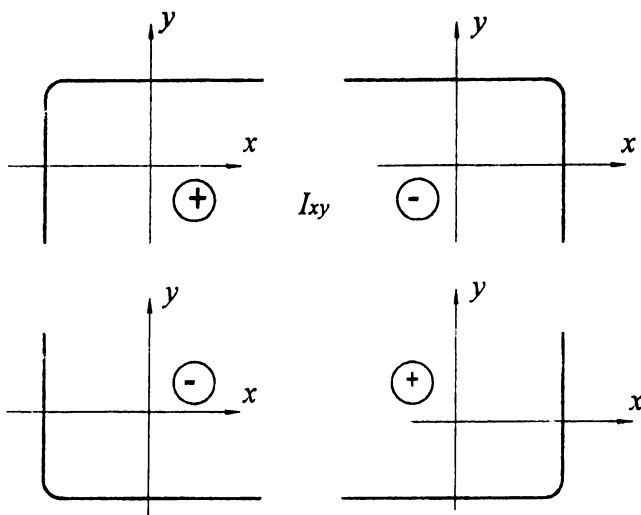


Рис. 19. Возможные положения уголка в сечении
и знаки для I_{xy}

Пример 5

Определить I_u , I_v и положение главных центральных осей сечения (рис. 20).

Сложное сечение состоит из двух прокатных профилей. Выписка из таблиц сортамента (прил. 5) приведена на рис. 21.

В качестве вспомогательных примем оси, проходящие по внешним сторонам швеллера (оси x_B , y_B , см. рис. 20). Координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_{c_i}}{\sum A_i} = \frac{30,6 \cdot 2,42 + 33,7 \cdot (-5,97)}{30,6 + 33,7} = -1,98 \text{ см};$$

$$y_{c_i} = 17,0 \text{ см} \quad (\text{вычислите самостоятельно}).$$

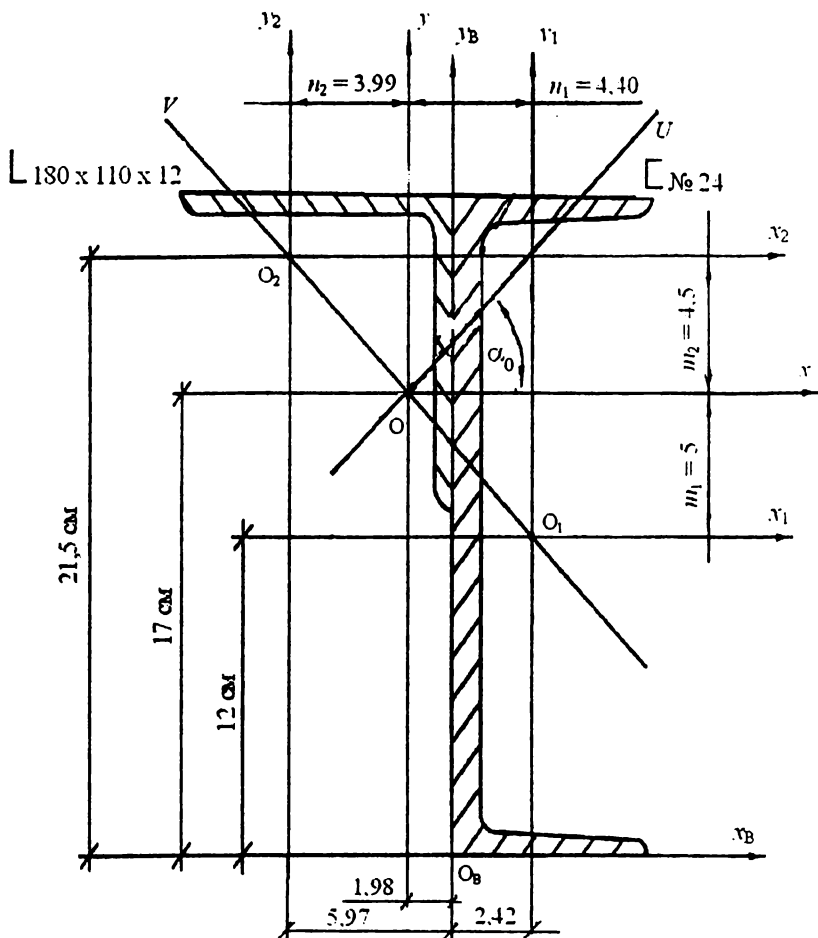


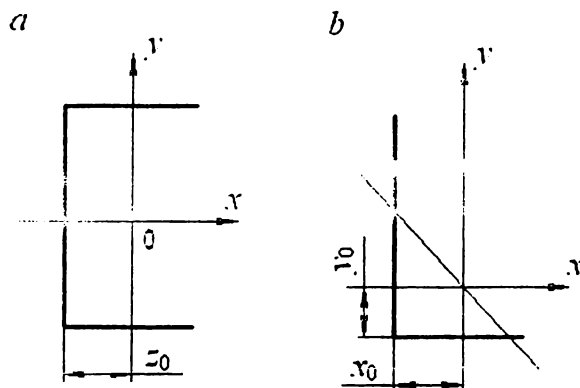
Рис. 20. Положение главных центральных осей инерции U и V сложного сечения

В качестве вспомогательных можно было бы выбрать, например, центральные оси швеллера. Тогда несколько сократится объем вычислений.

Осевые моменты инерции:

$$I_x = I_{x_1} + A_1 \cdot m_1^2 + I_{x_2} + A_2 \cdot m_2^2 = 2900 + 30,6 \cdot 5^2 + 324 + 33,7 \cdot 4,5^2 = 4670 \text{ см}^4.$$

Обратите внимание, что неравнобокий уголок в сечении расположен иначе, чем показано в таблице сортаментов. Значение I_y вычислите самостоятельно ($I_y = 2460 \text{ см}^4$).



№ 24

$$A = 30,6 \text{ см}^2$$

$$I_x = 2900 \text{ см}^4$$

$$I_y = 208 \text{ см}^4$$

$$z_0 = 2,42 \text{ см}$$

180 x 110 x 12

$$A = 33,7 \text{ см}^2$$

$$I_x = 1123 \text{ см}^4$$

$$I_y = 324 \text{ см}^4$$

$$I_{x(\min)} = 194 \text{ см}^4$$

$$x_0 = 2,52 \text{ см}, y_0 = 5,97 \text{ см}$$

Рис. 21. Значения геометрических характеристик прокатных профилей:

а – швеллера № 24; б – неравнобокого уголка 180 x 110 x 12

Центробежные моменты инерции:

– для швеллера $I_{x_1y_1} = 0$ (есть оси симметрии);

– для уголка $I_{x_2y_2} = -\sqrt{(1123 - 194) \cdot (324 - 194)} = -348 \text{ см}^4$,

знак минус – в связи с положением уголка в сечении;

– для всего сечения:

$$I_{xy} = I_{x_1y_1} + A_1 \cdot m_1 \cdot n + I_{x_2y_2} + A_2 \cdot m_2 \cdot n_2 =$$

$$= 0 + 30,6 \cdot 5,0 \cdot (-4,40) - 348 + 33,7 \cdot (-4,5) \cdot 3,99 = -1626 \text{ см}^4.$$

Проследите назначение знаков у n и m . От центральных осей швеллера переходим к общим центральным осям сечения, поэтому $+m_2$ и $-n_2$.

При переходе от осей x_2y_2 к осям $xу$ будет: $-m_2$ и n_2 .

Главные моменты инерции сечения:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left[(4670 + 2460) \pm \sqrt{(4670 - 2460)^2 + 4 \cdot (-1626)^2} \right] = \frac{1}{2} (7130 \pm 3930);$$

$$I_u = 5,53 \cdot 10^3 \text{ см}^4 = 5,53 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_v = 1,6 \cdot 10^3 \text{ см}^4 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Положение главных центральных осей сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2(-1626)}{4670 - 2460} = 1,471; \quad \alpha_0 = 55^\circ 48';$$

$$\alpha_0 = 27^\circ 54'.$$

Угол α_0 отсчитывается от оси x , так как $I_x > I_y$.

Проверка правильности вычисления величин I_u , I_v и α_0 производится по формуле

$$I_{xy}^* = \frac{I_u - I_v}{2} \cdot \sin 2\alpha_0.$$

Угол α_0 для этой формулы отсчитывается от оси u .

$$I_{xy}^* = \frac{5530 - 1600}{2} \cdot (-0,827) = -1626 \text{ см}^4 = I_{xy},$$

значит, операции по вычислению I_u , I_v , и α_0 произведены правильно.

Рассмотренное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси u и наименьшую – относительно оси v .

Задача 5. Моменты инерции плоских сечений

Определить геометрические характеристики сечения (рис. 22), составленного из прокатных профилей (табл. 5).

План решения задачи:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей;
- 3) вычислить величины главных центральных моментов инерции;
- 4) определить положение главных центральных осей инерции сечения;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1 : 2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

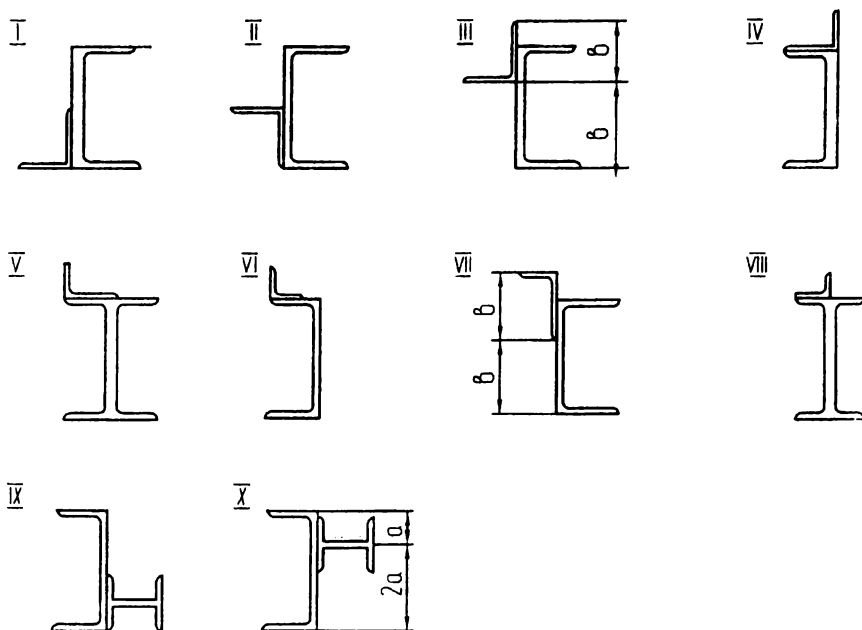


Рис. 22. Схемы к задаче 5

Данные к задаче 5

| Номер строки | Тип сечения | Номер швеллера | Равнобокий уголок | Номер двутавра |
|--------------|-------------|----------------|-------------------|----------------|
| 1 | I | 14 | 80 x 80 x 8 | 12 |
| 2 | II | 16 | 80 x 80 x 6 | 14 |
| 3 | III | 18 | 90 x 90 x 8 | 16 |
| 4 | IV | 20 | 90 x 90 x 7 | 18 |
| 5 | V | 22 | 90 x 90 x 6 | 20а |
| 6 | VI | 24 | 100 x 100 x 8 | 20 |
| 7 | VII | 27 | 100 x 100 x 10 | 22а |
| 8 | VIII | 30 | 100 x 100 x 10 | 22 |
| 9 | IX | 33 | 125 x 125 x 10 | 24а |
| 0 | X | 36 | 125 x 125 x 12 | 24 |
| — | в | а | б | в |

Вопросы для самоконтроля

1. По каким формулам определяются координаты центра тяжести сечения?
2. Для каких сечений при определении центра тяжести достаточно найти только одну координату?
3. Что называется осевым, центробежным и полярным моментами инерции сечения?
4. Какова размерность моментов инерции?
5. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно центральной оси, параллельной основанию?

6. Относительно каких центральных осей осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?

7. Запишите зависимость для осевого момента инерции при параллельном переносе осей.

8. Как определяется положение главных осей?

Глава 6. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

6.1. Расчет на прочность

Плоским (прямым) поперечным изгибом балки называется изгиб, при котором все внешние нагрузки действуют в одной из главных плоскостей инерции балки, причем проекции внешних сил и реакций опор на ось балки равны нулю. В этом случае отличны от нуля только две из шести внутренних сил: внутренняя поперечная сила Q_y и внутренний изгибающий момент M_z , действующий в этой же плоскости, где приложены внешние силы (рис. 23).

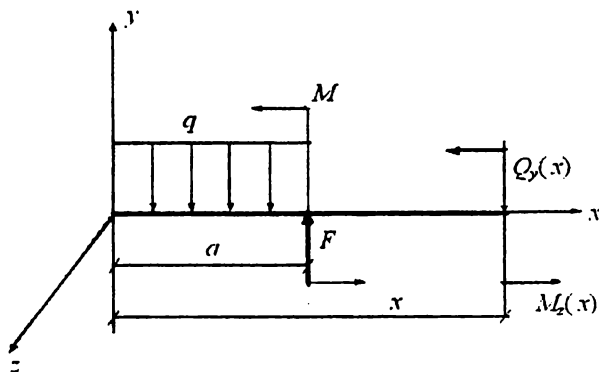


Рис. 23. Внутренние силы в поперечном сечении балки: поперечная сила $Q_y(x)$ и изгибающий момент $M_z(x)$

Эти внутренние силы определяются методом сечений из условий статического равновесия части балки, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения, под действием внешней нагрузки и искомых внутренних сил, действующих со стороны отброшенной части балки. Условия статического равновесия сводятся к двум уравнениям статики: равенстве нулю суммы проекций на ось y всех сил ($\sum Y = 0$) и равенстве нулю суммы моментов в сечении x всех сил ($\sum m_x = 0$).

Для балки (см. рис 23) поперечная сила $Q_y(x)$ и изгибающий момент $M_z(x)$ определяются из двух уравнений статического равновесия:

$$\Sigma Y = F - q \cdot a - Q_y(x) = 0,$$

$$\Sigma m_x = q \cdot a \cdot (x - \frac{a}{2}) + M - F \cdot (x - a) + M_z(x) = 0,$$

откуда

$$Q_y(x) = F - q \cdot a, \quad (2)$$

$$M_z(x) = F \cdot (x - a) - M - q \cdot a \cdot (x - \frac{a}{2}), \quad (3)$$

При выполнении условий (2) и (3) все остальные условия статического равновесия удовлетворяются автоматически, т. е. никаких других внутренних сил при плоском изгибе не возникнет.

Из (2) и (3) видим, что внутренняя поперечная сила $Q_y(x)$ в сечении x численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. Аналогично, внутренний изгибающий момент $M_z(x)$ в сечении x численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних нагрузок, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Для того, чтобы внутренние силы определялись однозначно и независимо от того, равновесие какой части балки рассматривается, вводят правило знаков для $Q_y(x)$ и $M_z(x)$.

Если внешняя сила (F , q) стремится повернуть рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести сечения x по ходу часовой стрелки, то ее вклад во внутреннюю силу $Q_y(x)$ положителен, если против хода часовой стрелки – отрицателен (рис. 24).

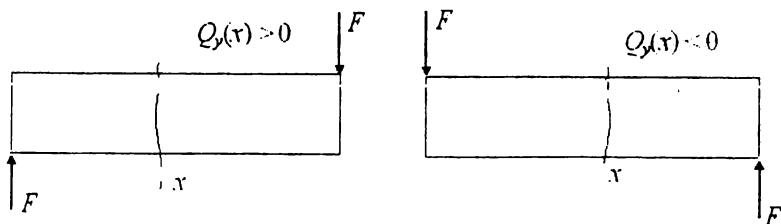


Рис. 24. Определение знака поперечной силы $Q_y(x)$

Если внешняя сила (F , q , M) стремится изогнуть часть балки относительно центра тяжести сечения x выпуклостью вниз (сжатое волокно сверху), то ее вклад во внутренний момент $M_z(x)$ положителен; если выпуклостью вверх (сжатое волокно снизу) – отрицателен (рис. 25).

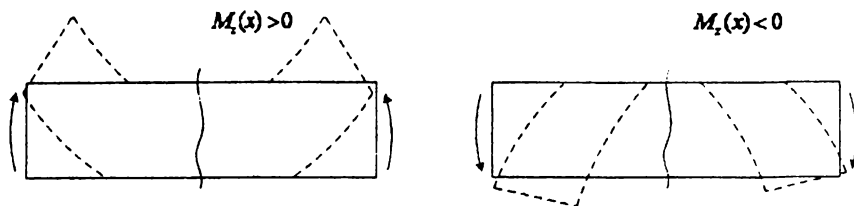


Рис. 25. Определение знака изгибающего момента $M_z(x)$

Направим ось абсцисс (ox) системы координат слева направо вдоль оси балки. Тогда внутренние усилия $Q_y(x)$, $M_z(x)$ в поперечных сечениях и внешняя распределенная нагрузка q будут функциями x . Они связаны дифференциальными соотношениями:

$$\frac{dQ_y(x)}{dx} = q(x); \quad (4)$$

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = Q_y(x); \quad (5)$$

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x). \quad (6)$$

Здесь $q(x)$ считается положительной, если она направлена вверх. Эти соотношения следует использовать при проверке правильности построения эпюр $Q_y(x)$ и $M_z(x)$.

Внутренний изгибающий момент связан с нормальными напряжениями, которые распределяются по высоте сечения неравномерно, вызывая растяжение одной его части и сжатие другой.

Условие прочности по нормальным напряжениям для балки любой формы поперечного сечения имеет вид

$$|\sigma_{\text{экв}}| \approx |\sigma|_{\text{max}} = \frac{|y_{\text{max}} \cdot M_z|_{\text{max}}}{I_z} \leq [\sigma_n], \quad (7)$$

где M_z – изгибающий момент в опасном сечении балки, Н·м;

I_z – момент инерции поперечного сечения, м⁴;

y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения, м.

Для балок, поперечные сечения которых симметричны относительно нейтральной оси z , условие прочности преобразуется к виду

$$\sigma = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma_u], \quad (8)$$

где W_z – осевой момент сопротивления поперечного сечения, м³.

На основании соотношений (7), (8) W_z определяется по формуле

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}.$$

Поперечная сила $Q_y(x)$, вектор которой лежит в плоскости поперечного сечения, вызывает в точках сечения касательные напряжения τ_{xy} . По закону парности касательных напряжений на продольных площадках возникают равные им напряжения $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau$.

Напряжения τ_{xy} возникают вследствие деформации среза поперек продольных волокон балки, а напряжения τ_{yx} вызваны деформацией сдвига продольных волокон вдоль балки.

Для балок постоянного поперечного сечения при допущении, что касательные напряжения τ по ширине сечения b распределены равномерно, касательные напряжения при изгибе определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}}{b \cdot I_z},$$

где $S_z^{\text{отс}}$ – статический момент относительно оси z отсеченной части сечения;

b – ширина сечения;

I_z – осевой момент инерции сечения.

Интенсивность сдвигающих усилий T (погонная сдвигающая сила) определяется равенством

$$T = \tau \cdot b = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}}{I_z}.$$

Касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно, достигая максимального значения на нейтральной оси. Как показывают расчеты, в балках, поперечные размеры которых много меньше их длины, касательные напряжения в поперечных сечениях значительно меньше нормальных, поэтому, если балка изготовлена из изотропного материала, то при записи условия прочности касательные напряжения можно не учитывать, именно поэтому $\sigma_{\text{кп}} \approx \sigma$.

6.1.1. Построение эпюр внутренних сил Q_y и M_z

Эпюрой внутренней силы называется график ее изменения вдоль оси балки. Из определения внутренней поперечной силы $Q_y(x)$ следует, что в том и только в том сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, имеется скачок на эпюре $Q_y(x)$ на величину этой силы. Аналогично из определения внутреннего изгибающего момента $M_z(x)$ следует, что в том и только в том сечении, где приложен внешний изгибающий момент, – скачок на эпюре $M_z(x)$ на величину этого момента. Под внешними силами и моментами мы подразумеваем и реакции опор.

При проверке правильности построения эпюр $Q_y(x)$ и $M_z(x)$ можно использовать табл. 6, составленную на основании дифференциальных соотношений (4) – (6). В этой таблице указана связь между знаками интенсивности распределенной нагрузки $q(x)$, поперечной силы $Q_y(x)$ и характером изменения эпюр $Q_y(x)$ и $M_z(x)$.

Таблица 6

Правила построения эпюр $Q_y(x)$ и $M_z(x)$, основанные
на дифференциальных зависимостях между q , $Q_y(x)$, $M_z(x)$

| Распределенная нагрузка q , кН/м | Поперечная сила Q_y , кН | Изгибающий момент M_z , кН·м |
|---------------------------------------|--|---|
| $q=0$ | Поперечная сила постоянна | Изгибающий момент изменяется по линейному закону |
| | 0 | Момент постоянный _____ |
| | + | Момент возрастает ↗ |
| | - | Момент убывает ↘ |
| $q > 0$ | Поперечная сила возрастает по линейному закону | Момент изменяется по закону параболы, выпуклость вниз |
| | 0 | Момент принимает экстремальное значение M_{\min} |
| | + | Момент возрастает по закону параболы, выпуклость вниз ↗ |
| | - | Момент убывает по закону параболы, выпуклость вниз ↘ |
| $q < 0$ | Поперечная сила убывает по линейному закону | Момент изменяется по закону параболы, выпуклость вверх |
| | 0 | Момент принимает экстремальное значение M_{\max} |
| | + | Момент возрастает по закону параболы, выпуклость вверх ↗ |
| | - | Момент убывает по закону параболы, выпуклость вверх ↘ |

Пример 6

Рассмотрим построение эпюр $Q_y(x)$ и $M_z(x)$ методом записи и исследования их уравнений на примере расчета на прочность двухопорной балки.

Необходимо построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z для двухопорной двутавровой балки (рис. 26) и подобрать размеры поперечного сечения при $[\sigma_u] = 200$ МПа.

1. Определение опорных реакций

$$\sum x = A_x = 0;$$

$$(\sum M)_A = q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M - P \cdot (a+b) - B \cdot (a+b+c) = 0;$$

$$(\sum M)_A = 10 \cdot 2 \cdot 1 - 30 - 20 \cdot 3 - B \cdot 4 = 0, \quad B = -17,5 \text{ кН};$$

$$(\sum M)_B = A \cdot (a+b+c) - q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c\right) - M + P \cdot c = 0;$$

$$A \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 3 - 30 + 20 \cdot 1 = 0, \quad A = 17,5 \text{ кН}.$$

Проверка. $\sum Y = A - q \cdot a + P + B = 17,5 - 20 + 20 - 17,5 = 0$, следовательно, реакции найдены верно.

2. Построение эпюр Q_y и M_z

Балка имеет три участка нагружения.

Участок I

В пределах первого участка произвольно намечаем сечение x_1 (см. рис. 26): $x_1 \in]0; 2[$ м.

Для составления уравнений $Q_y(x_1)$ и $M_z(x_1)$ рассмотрим условия равновесия левой (от сечения x_1) части балки. Поперечная сила в сечении x_1 равна алгебраической сумме внешних сил по левую сторону от сечения.

Учитывая правило знаков (см. рис. 24), получим $Q_y(x) = A - q \cdot x_1 =$
 $= 17,5 - 10 \cdot x_1$ (кН) – линейная зависимость.

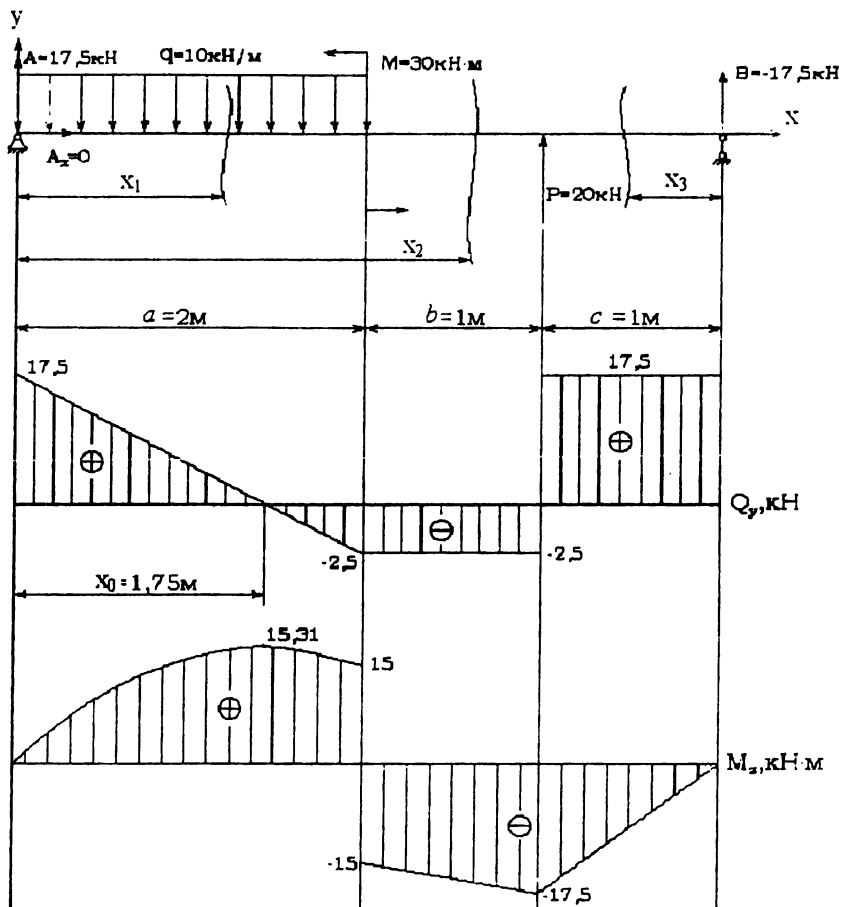


Рис. 26. Построение эпюр $Q_y(x)$ и $M_z(x)$ для двухопорной балки

График поперечной силы $Q_y(x)$ можно построить по двум точкам, абсциссы которых соответствуют границам участка I:

$$Q_y(0) = 17,5 \text{ кН}; \quad Q_y(2) = -2,5 \text{ кН}.$$

Далее нам нужно найти точку пересечения эпюры с базисной линией, т. е.

$$Q_y(x) = 0; \quad A - qx_0 = 0; \quad x_0 = \frac{A}{q} = 1,75. \quad (9)$$

Внутренний изгибающий момент $M_z(x_1)$ в сечении x_1 равен алгебраической сумме моментов от всех внешних нагрузок по левую сторону от сечения. С учетом правила знаков (см. рис. 25) получим

$M_z(x) = A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 17,5 - 5 \cdot x_1^2$ – парабола ветвями вниз. Значения на границах участка $M_z(0) = 0$, $M_z(2\text{м}) = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Вершина параболы находится из условия

$$\frac{dM_z(x_1)}{dx} = Q(x_1),$$

т. е. из (9) при $x_0 = 1,75 \text{ м}$ $M_z(1,75 \text{ м}) = 15,31 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

По трем точкам строим эпюру M_z на участке I.

Участок II

Наметив сечение x_2 , рассмотрим левую часть балки:

$$x_2 \in]2;3[\text{ м},$$

$$Q_y(x_2) = A - q \cdot 2 = 17,5 - 20 = -2,5 \text{ кН} - \quad (10)$$

горизонтальная прямая, так как $Q_y(x_2) = -2,5 \text{ кН} - \text{const}$.

$$M_z(x_2) = A \cdot x_2 - q \cdot 2 \cdot (x_2 - \frac{a}{2}) - M = 17,5 \cdot x_2 - 20 \cdot (x_2 - 1) - 30 = \quad (11)$$

$$= -2,5 \cdot x_2 - 10 \text{ кН} \cdot \text{м} -$$

прямая линия. $M_z(2\text{м}) = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z(3\text{м}) = -17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Можно убедиться, что из условия равновесия правой части балки получаются те же самые выражения (10) и (11) для внутренних сил:

$$Q_y(x_2) = -P - B = -20 + 17,5 = -2,5 \text{ кН};$$

$$M_z(x_2) = B \cdot (a + b + c - x_2) + P \cdot (a + b - x_2) =$$

$$-17,5 \cdot (4 - x_2) + 20 \cdot (3 - x_2) = -2,5 \cdot x_2 - 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III

Здесь проще рассматривать условие равновесия правой части балки

$$x_3 \in]0;1[\text{ м.}$$

Учитывая правила знаков для правой части балки (см. рис. 24, 25), получим:

$$Q(x_3) = -B = +17,5 \text{ кН} - \text{горизонтальная прямая.}$$

$$M(x_3) = B \cdot x_3 = -17,5 x_3,$$

$$M(0) = 0, \quad M(1) = -17,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Построив эпюры Q , и M , (см. рис. 26), проверяем, удовлетворяют ли они правилам, сформулированным в табл. 6.

3. Расчет на прочность

Условие прочности при прямом изгибе можно приближенно записать в виде неравенства

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma],$$

откуда находим момент сопротивления поперечного сечения.

Вычисления производим в системе СИ:

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{17,5 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 8,75 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 87,5 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (см. прил. 5) определим, что такому условию соответствует двутавр № 16, $W_z = 109 \text{ см}^3$.

6.1.2. Построение эпюр внутренних сил Q , и M_z

без записи их уравнений

Изучив закономерность изменения Q , и M_z на участках балки в зависимости от характера нагрузки, эпюры можно строить не по их уравнениям, а по отдельным ординатам, вычисленным для характерных

сечений. Характерными являются сечения границ участков балки, а также сечения, где Q_y меняет знак.

В отличие от способа построения эпюр, рассмотренного выше, где качественные особенности эпюр (интервалы возрастания и убывания, точки экстремумов и разрывов) выявляются только в результате их построения, а затем проверяются в соответствии с табл. 6, в данной методике эти качественные особенности используются непосредственно для построения эпюр. Как показывает практика, при этом не только уменьшается объем вычислений, но и снижается вероятность ошибки.

Рассмотрим этот метод на примере балки, представленной на рис. 26.

1. Построение эпюры Q_y

Рисуем график эпюры в виде непрерывной линии так, что абсцисса x возрастает (идем слева направо). При этом в соответствии с правилом знаков для Q_y , встретив положительную по алгебраической величине сосредоточенную силу, направленную вверх, делаем на эпюре Q_y скачок вверх на величину этой силы (если сила направлена вверх, но ее значение отрицательно, то скачок вниз). Встретив силу, положительную по алгебраической величине, направленную вниз, делаем скачок вниз. Так как $dQ_y/dx = q(x)$, то из физического смысла производной q – скорость роста функции Q_y . Если на участке $q > 0$ (направлена вверх), то эпюра Q_y растет при увеличении x . Если $q = \text{const}$, то Q_y изображается прямой линией. Чтобы найти величину возрастания эпюры Q_y на участке, нужно q умножить на длину этого участка. Соответственно, если $q < 0$ (направлена вниз), то Q_y убывает; если $q = 0$, то $Q_y = \text{const}$.

Для иллюстрации построения эпюр без записи их уравнений рассмотрим расчетную схему, приведенную на рис. 26.

Участок I

$$x_1 \in]0,2[\text{ м},$$

$$Q_{y(0+0)} = A = 17,5 \text{ кН},$$

$$Q_{y(2-0)} = Q_{y(0+0)} - q \cdot a = 17,5 - 10 \cdot 2 = -2,5 \text{ кН}.$$

Точка, где поперечная сила $Q_y(x)$ равна нулю,

$$Q_{y(x)} = Q_{y(0+0)} - q \cdot x_0 = 0,$$

$$\text{отсюда } x_0 = \frac{Q_{y(0+0)}}{q} = \frac{17,5}{10} = 1,75 \text{ м}.$$

Так как $q(x) = \text{const}$, то график $Q_y(x)$ – прямая линия.

Участок II

$$x_2 \in]2,3[\text{ м},$$

$$Q_{y(2+0)} = Q_{y(2-0)} = -2,5 \text{ кН (скачка нет)},$$

$$Q_{y(3-0)} = Q_{y(2+0)} = -2,5 \text{ кН}.$$

График функции $Q_y(x_2)$ – горизонтальная прямая.

Участок III

$$x_3 \in]3,4[\text{ м},$$

$$Q_{y(3+0)} = Q_{y(3-0)} + P = -2,5 + 2,0 = 17,5 \text{ кН} - \text{скачок вверх на величину силы } P;$$

$$Q_{y(4-0)} = Q_{y(3+0)} = 17,5 \text{ кН}.$$

График функции $Q_y(x_3)$ – горизонтальная прямая.

Можно считать, что балка продолжается и правее сечения $x = 4$ м. Тогда все внутренние силы в сечениях $x > 4$ м должны быть равны нулю (из условия равновесия правой части). Проверим это:

$$Q_{y(4+0)} = Q_{y(4-0)} + B = 17,5 - 17,5 = 0 -$$

скачок вниз на величину силы B – проверка сошлась.

2. Построение эпюры M_z

График эпюры M_z также будем строить в порядке возрастания абсциссы x (идем слева направо). Скачки на эпюре M_z наблюдаются в тех

и только в тех точках, где приложены сосредоточенные моменты сил, причем если положительный по алгебраической величине момент направлен по часовой стрелке, то в соответствии с правилом знаков (см. рис. 24, где рассматривается равновесие левой части), имеется скачок вверх на величину внешнего момента. Если встретили внешний момент, вращающий против часовой стрелки, – рисуем скачок вниз.

Так как $\frac{dM_z(x)}{dx} = Q_y(x)$, то $Q_y(x)$ – скорость роста функции $M_z(x)$.

Если на участке $Q_y(x) > 0$, то $M_z(x)$ растет, при $Q_y(x) = 0$ $M_z(x) = \text{const}$; если $Q_y(x) < 0$, $M_z(x)$ убывает с ростом аргумента x . В том сечении внутри участка, где $Q_y(x)$ меняет знак, на эпюре $M_z(x)$ – экстремум. Если внутри участка $Q_y(x) = \text{const}$, то $M_z(x)$ – прямая; если же $Q_y(x)$ – наклонная прямая, то эпюра $M_z(x)$ изображается параболой. Иначе говоря, на тех участках, где распределенная нагрузка отсутствует ($q(x) = 0$) эпюра $M_z(x)$ изображается прямой линией, а там, где $q(x) = \text{const} \neq 0$, $M_z(x)$ изображается параболой. Направление выпуклости параболы – навстречу распределенной нагрузке (рис. 27).

Для того, чтобы найти величину изменения внутреннего момента M_z на заданном участке, нужно среднее значение скорости изменения момента ($Q_{\text{ср}} = \frac{(Q_{\text{зн}} + Q_{\text{зк}})}{2}$) умножить на длину участка. Иными словами, величина изменения внутреннего изгибающего момента M_z на участке равна площади эпюры Q_y на этом участке:

$$M_{\text{зк}} = M_{\text{зн}} + Q_{\text{ср}} \cdot L, \quad (12)$$

где $M_{\text{зк}}$ – значение внутреннего момента в конце, а $M_{\text{зн}}$ – в начале участка длиной L ;

$Q_{\text{ср}}$ – среднее значение внутренней поперечной силы на этом участке.

Формула (12) справедлива для любого участка, внутри которого нет внешних изгибающих моментов.

Участок I

$$x_1 \in]0,2[\text{ м.}$$

Так как в начале участка нет сосредоточенного момента, то

$$M_{z(0+0)} = M_{z(0-0)} = 0.$$

Значение момента в точке максимума ($x = 1,75$ м) и в конце участка вычисляем по формуле (12):

$$M_{z(1,75)} = M_{z(0+0)} + Q_{cp} \cdot 1,75 = 0 + \frac{17,5+0}{2} \cdot 1,75 = 15,31 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z(2-0)} = M_{z(1,75)} + Q_{cp} \cdot 0,25 = 15,31 + \left(\frac{0-2,5}{2}\right) \cdot 0,25 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Можно сделать проверку:

$$M_{z(2-0)} = M_{z(0+0)} + Q_{cp} \cdot 2 = 0 + \frac{17,5-2,5}{2} \cdot 2 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим параболу выпуклостью вверх.

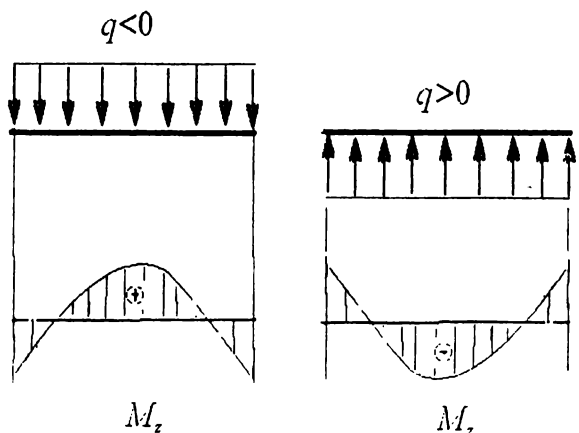


Рис. 27. Направление выпуклости параболы M_z в зависимости от знака распределенной нагрузки q

Участок II

$$x_2 \in]2,3[\text{ м.}$$

$M_{(2-0)} = M_{z(2-0)} - M = 15 - 30 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – на границе I и II участков скачок вниз на величину момента M .

Значение изгибающего момента в конце участка II:

$$M_{(3-0)} = M_{(2+0)} + Q_{cp} \cdot b = -15 + (-2,5) \cdot 1 = -17,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Так Q_y на этом участке постоянна и отрицательна, то эпюра M_z изображается прямой линией и убывает. Строим эту прямую по двум точкам.

Участок III

$$x_3 \in]3,4[\text{ м.}$$

Так как в сечении $x = 3 \text{ м}$ нет внешнего момента, то

$$M_{(3+0)} = M_{(3-0)} = -17,5 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{скачка нет.}$$

Так как Q_y положительна и постоянна, то на эпюре M_z – рост по прямой.

$$M_{(4-0)} = M_{(3+0)} + Q_{cp} \cdot c = -17,5 + 17,5 \cdot 1 = 0,$$

как и должно быть из условия равновесия правой части (проверка сошлась).

Задача 6. Плоский изгиб (консольная балка)

Произвести расчет на прочность консольной балки. Схемы балок представлены на рис. 28, данные к задаче приведены в табл. 7. Материал балки – сталь с $[\sigma_u] = 200 \text{ МПа}$.

План решения задачи:

- 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) определить диаметр круглого сечения балки или стороны прямоугольного сечения при $h/b = 2$.

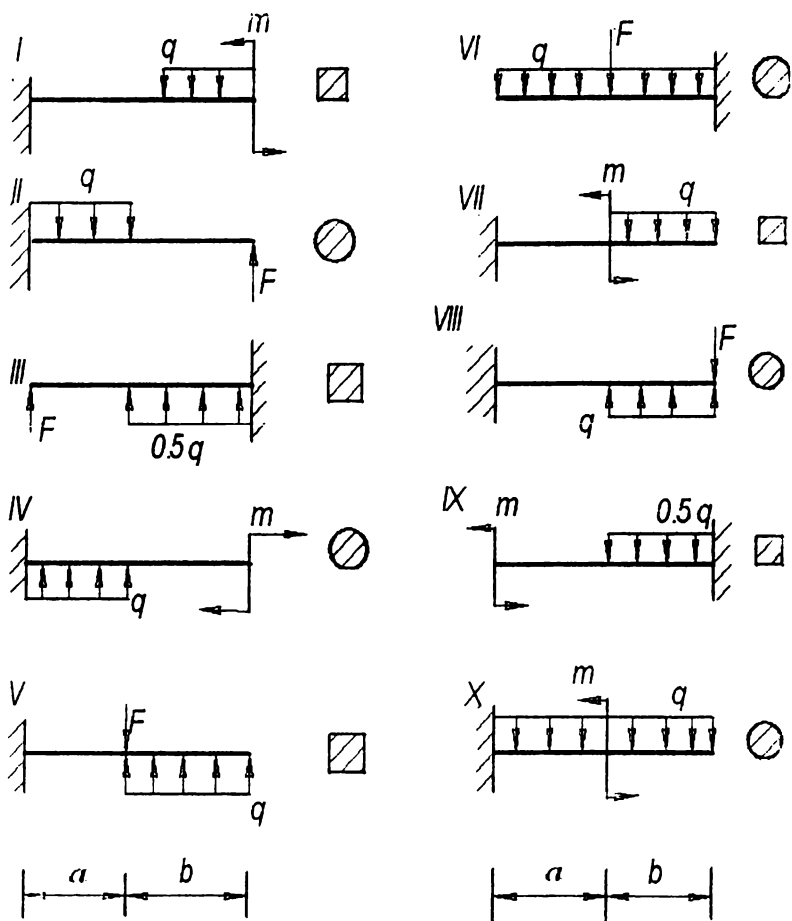


Рис. 28. Схемы балок к задаче 6

Таблица 7

Данные к задаче 6

| Номер строки | Номер схемы | Нагрузки | | | Длины участков, м | |
|--------------|-------------|----------|------------|------------|-------------------|-----|
| | | F , кН | M , кН·м | q , кН/м | a | b |
| 1 | I | 3 | 1 | 5,1 | 1,1 | 1,1 |
| 2 | II | 4 | 2 | 5,2 | 1,2 | 1,2 |
| 3 | III | 5 | 3 | 5,3 | 1,3 | 1,3 |
| 4 | IV | 6 | 4 | 5,4 | 1,4 | 1,4 |
| 5 | V | 7 | 5 | 5,5 | 1,5 | 1,5 |
| 6 | VI | 8 | 6 | 5,6 | 0,6 | 0,6 |
| 7 | VII | 9 | 7 | 5,7 | 0,7 | 0,7 |
| 8 | VIII | 10 | 6 | 5,8 | 0,8 | 0,8 |
| 9 | IX | 6 | 5 | 5,9 | 0,9 | 0,9 |
| 10 | X | 5 | 4 | 6,0 | 1,0 | 1,0 |
| — | в | а | б | в | б | в |

Задача 7. Плоский изгиб (двухопорная балка)

Произвести расчет на прочность двухопорной балки (рис. 29).

Материал балки – сталь, $[\sigma_n] = 200$ МПа.

План решения задачи:

- 1) определить опорные реакции и проверить правильность их определения;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;

3) подобрать номер профиля сечения.

Исходные данные к задаче 7 приведены в табл. 8.

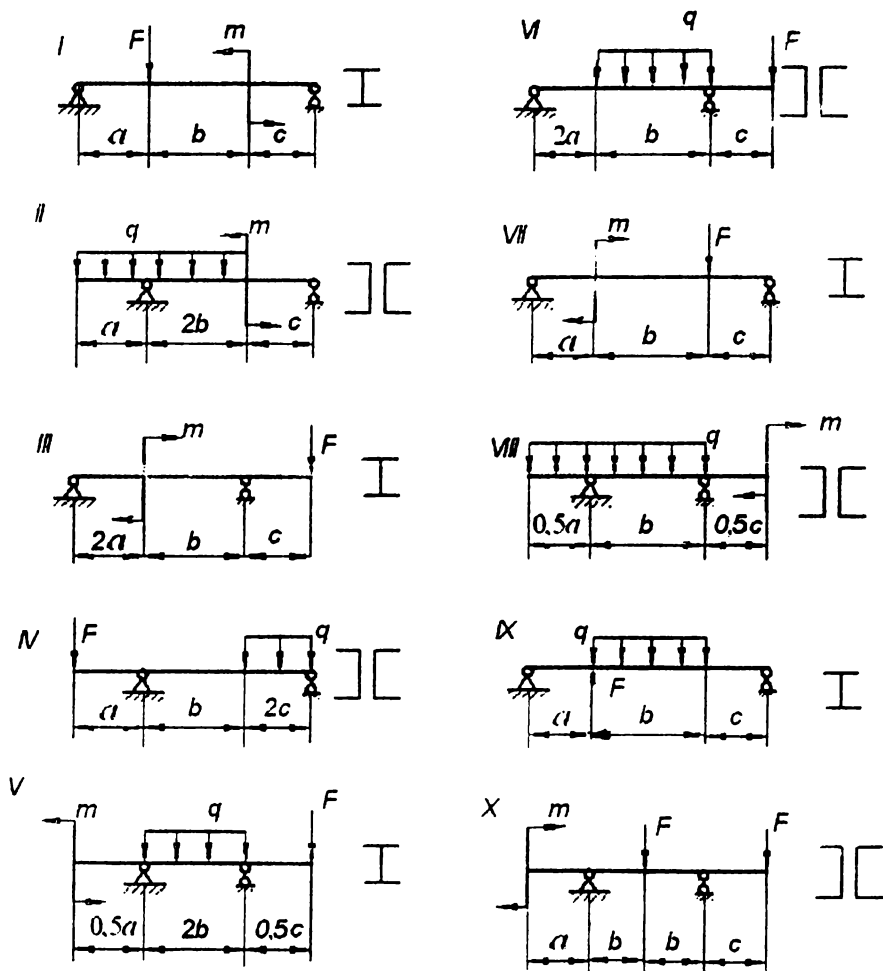


Рис. 29. Схемы балок к задаче 7

Таблица 8

Данные к задаче 7

| Номер строки | Номер схемы | Нагрузки | | | Длины участков, м | | |
|--------------|-------------|----------|-----------|------------|-------------------|-----|-----|
| | | F , кН | M , кНм | q , кН/м | a | b | c |
| 1 | I | 10 | 10 | 1 | 1,1 | 1,1 | 1,1 |
| 2 | II | 20 | 20 | 2 | 1,2 | 1,2 | 1,2 |
| 3 | III | 30 | 30 | 3 | 1,3 | 1,3 | 1,3 |
| 4 | IV | 40 | 40 | 4 | 1,4 | 1,4 | 1,4 |
| 5 | V | 50 | 50 | 5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| 6 | VI | 60 | 40 | 6 | 1,6 | 1,6 | 1,6 |
| 7 | VII | 70 | 30 | 7 | 1,7 | 1,7 | 1,7 |
| 8 | VIII | 80 | 20 | 8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 |
| 9 | IX | 90 | 10 | 9 | 1,9 | 1,9 | 1,9 |
| 10 | X | 100 | 60 | 10 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |
| – | в | а | б | в | а | б | в |

6.2. Определение перемещений при плоском изгибе

Перемещения при плоском изгибе характеризуются прогибом y и углом поворота поперечного сечения φ , величины которых определяются из универсального уравнения изогнутой оси балки:

$$E \cdot I_z \cdot y(x) = E \cdot I_z \cdot y_0 + E \cdot I_z \cdot \varphi_0 \cdot x + \sum \frac{m \cdot (x-a)^2}{2} + \sum \frac{F \cdot (x-b)^3}{6} + \\ + \sum \frac{q \cdot (x-c)^4}{24} - \sum \frac{q_k \cdot (x-d)^4}{24},$$

где y_0 , φ_0 – прогиб и угол поворота сечения в начале координат;

a, b – расстояние от начала координат до сечения, в котором приложен внешний силовой фактор (F и m или опорная реакция);

c – расстояние от начала координат до начала приложения распределенной нагрузки;

d – расстояние от начала координат до конца приложения распределенной нагрузки (начала приложения компенсирующей распределенной нагрузки q_k);

x – абсцисса рассматриваемого сечения.

При использовании универсального уравнения начало координат всегда выбирается на левом конце балки. Это уравнение получено путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения упругой линии балки:

$$E \cdot I_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x).$$

где $M(x)$ – изгибающий момент в сечении x .

Поэтому знаки у слагаемых, включающих F , m и q , будут определяться по правилу знаков для изгибающего момента при рассмотрении равновесия левой части балкой. По этой же причине в уравнения включаются только те силовые факторы, которые находятся слева от сечения с координатой x . Если распределенная нагрузка q не действует до правого конца балки, ее действие надо продолжить до этого конца и, соответственно, приложить равнозначную компенсирующую нагрузку q_k , которая учитывается в уравнении с противоположным основной q знаком. На эту особенность надо обратить внимание, так как при построении эпюр Q и M такой необходимости не возникало. Начальные параметры y_0 и φ_0 определяются из условия, что на опорах прогибы равны нулю (см. далее прим. 7).

Для проверки правильности построения упругой линии балки можно использовать соответствие знака кривизны упругой линии и знака

$M(x)$. Если $M(x) > 0$, то на этом участке выпуклость упругой линии будет направлена вниз, и наоборот.

Пример 7

Определить прогибы в характерных сечениях балки (рис. 30) и построить ее изогнутую ось.

Построение эпюр Q и M , а также подбор сечения балки сделайте самостоятельно. Принимается двутавр № 16, $W_z = 109 \text{ см}^3$, $I_z = 873 \text{ см}^4$.

Начало координат выбираем в крайнем левом сечении балки (на опоре С). Балка имеет три участка нагружения: I, II, III (см. рис. 30). Распределенная нагрузка q действует только на участке II. Доводим распределенную нагрузку q до конца балки и на этом участке III показываем компенсирующую (уравновешивающую) нагрузку.

Составим уравнение прогибов:

$$E \cdot I_z \cdot y(x) = E \cdot I_z \cdot y_0 + E \cdot I_z \cdot \varphi_0 \cdot x + C \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_{x>0} - m \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{x>1} -$$

$$- q \cdot \frac{(x-1)^4}{24} \Big|_{x>1} + B \cdot \frac{(x-3)^3}{6} \Big|_{x>3} + q_k \cdot \frac{(x-3)^4}{24} \Big|_{x>3}.$$

Рассматриваемая балка имеет три участка нагружения. В уравнении прогибов отмечены участки, на которых учитывается каждый из силовых факторов. Слагаемые уравнения от соответствующего внешнего фактора имеют такой же знак, как и при определении изгибающего момента.

Начальные параметры y_0 и φ_0 определим из условий, что на опорах балки прогибы равны нулю.

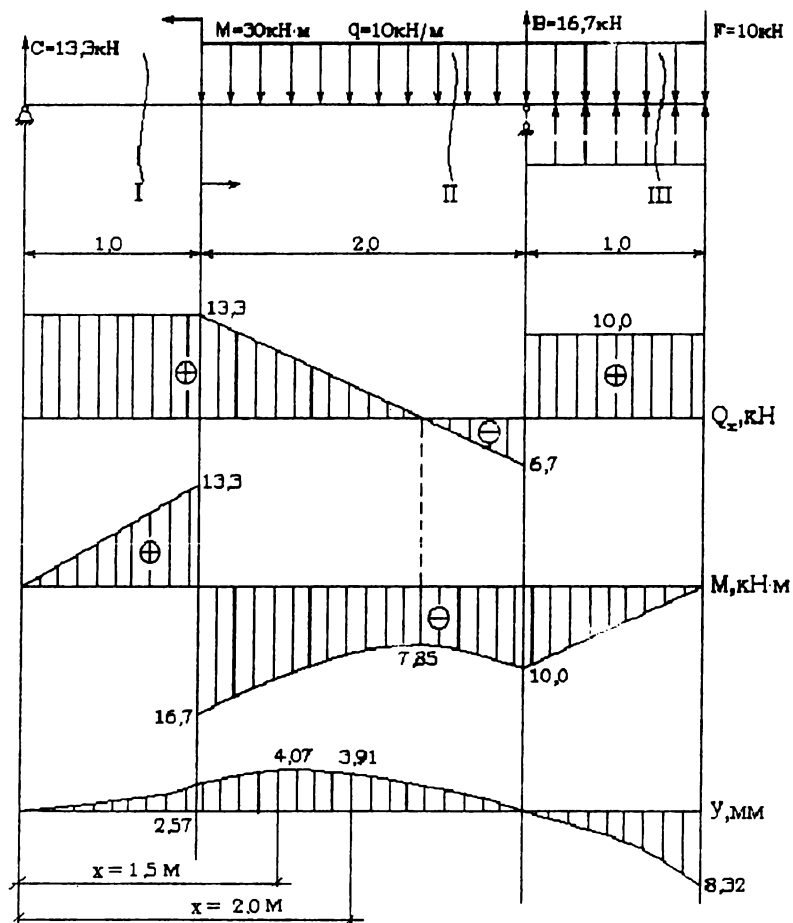


Рис. 30. Определение перемещений для двухопорной балки

При $x = 0$ $EI y_c = EI y_0 + EI \varphi_0 \cdot 0 + 13,3 \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow y_0 = 0$.

При $x = 3 \text{ м}$ $EI y_b = EI \varphi_0 \cdot 3 + 13,3 \frac{3^3}{6} - 30 \frac{(3-1)^2}{2} - 10 \frac{(3-1)^4}{24} = 0$,

откуда $EI\varphi_0 = 2,27 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$, а $\varphi_0 = \frac{2,27 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$.

Положительное значение φ_0 откладывается против хода часовой стрелки.

Определим прогибы в некоторых сечениях балки.

$$\text{При } x = 1,0 \text{ м } EIy = 2,27 \cdot 1 + 13,3 \cdot \frac{1^3}{6} = 4,49 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$y = \frac{4,49 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,57 \text{ мм}.$$

Величину прогиба при $x = 2,0 \text{ м}$ определите самостоятельно (получится $EIy = 6,82 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$, $y = 3,91 \text{ мм}$).

В межопорной части балки максимальный прогиб будет примерно посередине пролета.

$$\text{При } x = 1,5 \text{ м } EIy_{\max} = 7,11 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, y_{\max} = 4,07 \text{ мм}.$$

$$\text{При } x = 4,0 \text{ м } EIy = 2,27 \cdot 4 + 13,3 \cdot \frac{4^3}{6} - 30 \cdot \frac{(4-1)^2}{2} - 10 \cdot \frac{(4-1)^4}{24} +$$

$$+ 16,7 \cdot \frac{(4-3)^3}{6} + 10 \cdot \frac{(4-3)^4}{24} = -14,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$y = -\frac{14,4 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 8,32 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,32 \text{ мм}.$$

В некоторых случаях начало координат может быть выбрано на свободном конце балки. В этом случае $y_0 \neq 0$ и $\varphi_0 \neq 0$. Если начало координат в опорном закреплении, то $y_0 \neq 0$ и $\varphi_0 = 0$.

Задача 8. Определение перемещений при плоском изгибе

Определить перемещение балки и изобразить вид упругой линии балки, если $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $I_z = 1000 \text{ см}^4$ (рис. 31).

План решения задачи:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюру $M(x)$;
- 3) вычислить величины прогибов в характерных сечениях;
- 4) изобразить вид упругой линии балки.

Данные к задаче 8 приведены в табл. 9.

Таблица 9

Данные к задаче 8

| Номер строки | Номер схемы | Нагрузки | | | Длина a , м |
|--------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| | | F , кН | M , кН·м | q , кН/м | |
| 1 | I | 1 | 1 | 1 | 1,0 |
| 2 | II | 2 | 2 | 2 | 1,2 |
| 3 | III | 3 | 3 | 3 | 1,4 |
| 4 | IV | 4 | 4 | 4 | 1,6 |
| 5 | V | 5 | 5 | 5 | 1,8 |
| 6 | VI | 6 | 6 | 6 | 2,0 |
| 7 | VII | 7 | 7 | 5 | 1,9 |
| 8 | VIII | 8 | 8 | 4 | 1,7 |
| 9 | IX | 9 | 9 | 3 | 1,5 |
| 0 | X | 10 | 10 | 2 | 1,3 |
| — | в | a | b | v | b |

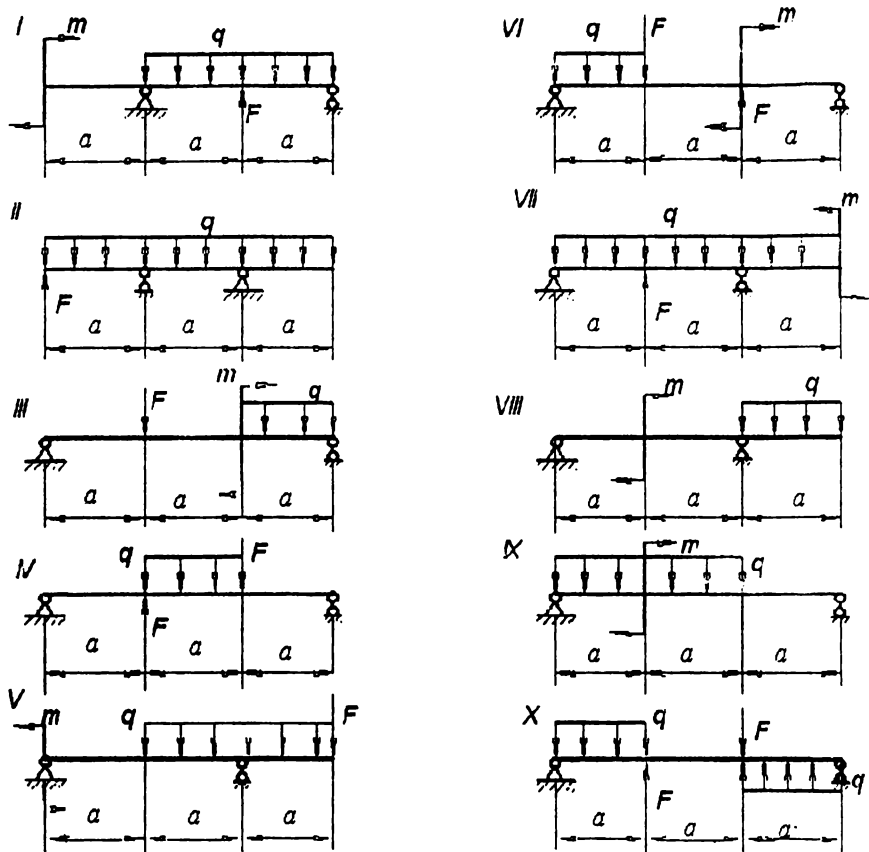


Рис. 31. Схемы балок к задаче 8

Вопросы для самоконтроля

1. Какие типы опор применяются для соединения балок с основанием и какие реактивные усилия могут возникать в этих опорах?
2. Какие уравнения равновесия применяются для определения опорных реакций и как проверить правильность определения опорных реакций?

3. При какой нагрузке на брус получается явление, называемое чистым изгибом?

4. Какой изгиб называется поперечным и какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе?

5. Какое правило знаков принято для поперечной силы и изгибающего момента?

6. Когда изгиб балки называется плоским?

7. Какие зависимости существуют между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью вертикальной распределенной нагрузки?

8. Какие следствия вытекают из дифференциальных зависимостей при поперечном изгибе и как они используются при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?

9. Какая геометрическая характеристика сечения определяет прочность по нормальным напряжениям при изгибе?

10. Как распределяются нормальные напряжения по сечению балки?

11. Как определяется изгибающий момент и поперечная сила, передающиеся на отдельные элементарные объемы балки?

12. Как рассчитываются балки на прочность?

13. Как находится опасная точка в сечении при плоском изгибе?

14. В чем состоит общая идея метода начальных параметров?
Запишите универсальную формулу для прогибов и углов поворота.

Глава 7. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

О принципе расчета статически неопределимых систем уже было сказано ранее (см. п.1.2). Рассмотрим на примере, как это делается применительно к балкам.

Пример 8

Определить размеры h , b прямоугольного поперечного сечения стальной балки (рис. 32, а), если $[\sigma_n] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $h/b = 2$. Определить прогибы посередине пролета балки и на конце консоли.

Число неизвестных реакций 4, уравнений статики 3: балка один раз статически неопределима. Целесообразные уравнения статики:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = C_x = 0 &\Rightarrow C_x = 0; \\ \sum M_B = -m_c + 4C_y - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 2 = 0 &\Rightarrow 4C_y - m_c = 24.\end{aligned}\quad (13)$$

Дополнительное уравнение составим, исходя из условия, что на опоре B прогиб равен нулю:

$$E \cdot I \cdot y_B = E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \varphi_0 \cdot 4 + \frac{C_y \cdot 4^3}{6} - \frac{m_c \cdot 4^2}{2} - \frac{F \cdot (4-2)^3}{6} - \frac{q \cdot 4^4}{24} = 0.$$

Так как начало координат помещено в защемлении, начальные параметры $y_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$. Тогда из уравнения прогибов получим:

$$64C_y - 48m_c = 160.\quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) следует: $C_y = 7,75$ кН, $m_c = 7$ кН·м.

Определим опорную реакцию B :

$$\sum M_c = -m_c - B \cdot 4 + F \cdot 2 = 0,$$

откуда $B = 4,25$ кН.

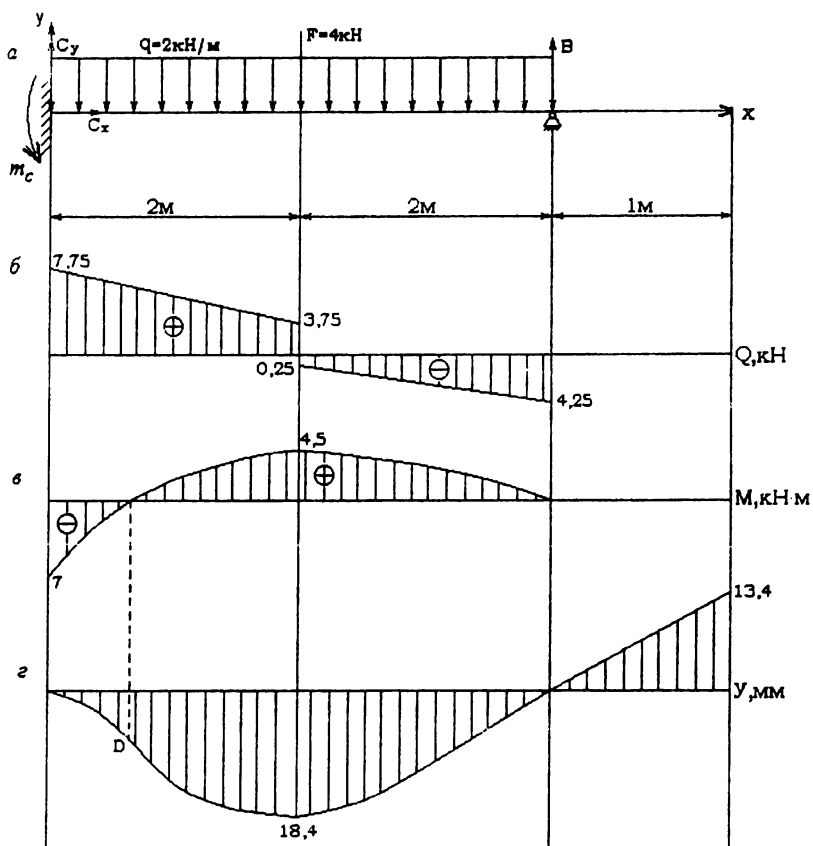


Рис. 32. Эпюры поперечных сил Q ,
изгибающих моментов M и прогибов y

Проверка вычислений реакций:

$$\sum F_{iy} = C_y - F + B - q \cdot 4 = 7,75 - 4 + 4,25 - 8 = 0.$$

Эпюры Q и M показаны на рис. 32, б, в.

Размеры сечения балки определим из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma_n]; \quad W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma_n]};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad h = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Момент инерции сечения

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = 170,66 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Жесткость сечения

$$EI_z = 2 \cdot 10^{11} \cdot 170,66 \cdot 10^{-8} = 341,33 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Прогиб посередине пролета балки ($x = 2 \text{ м}$):

$$EIy = \frac{-7 \cdot 2^2}{2} + \frac{7,75 \cdot 2^3}{6} - \frac{2 \cdot 2^4}{24} = -6,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y = -\frac{6,33 \cdot 10^3}{341,33 \cdot 10^3} = -0,0185 \text{ м} = -18,5 \text{ мм}.$$

Прогиб на конце консоли ($x = 5 \text{ м}$):

$$EIy = -\frac{7 \cdot 5^2}{2} + \frac{7,75 \cdot 5^3}{6} - \frac{2 \cdot 5^4}{24} - \frac{4 \cdot 3^3}{6} + \frac{4,25 \cdot 1}{6} = 4,58 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

откуда $y = \frac{4,58 \cdot 10^3}{341,33 \cdot 10^3} = 0,0134 \text{ м} = 13,4 \text{ мм}.$

Изогнутая ось балки показана на рис. 32, з. Необходимо отметить, что консольная часть балки не деформируется ($M = 0$), но перемещается за счет деформации пролетной части. Точка D – точка перегиба упругой линии.

Задача 9. Расчет статически неопределимой балки

Произвести расчет статически неопределимой балки (рис. 33).

Материал балки – сталь $[\sigma_x] = 210 \text{ МПа}$. Данные к задаче приведены в табл.10.

План решения задачи:

- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюры Q и M ;
- 3) определить номер профиля сечения;
- 4) изобразить изогнутую ось балки, определив величины прогибов в характерных сечениях (не менее двух).

Примечание. Для раскрытия статической неопределимости следует составить уравнения прогибов для шарнирной опоры и уравнение моментов относительно той же опоры.

Таблица 10

Данные к задаче 9

| Номер строки | Номер схемы | Нагрузки | | | Длины участков, м | | |
|--------------|-------------|-------------|---------------|---------------|-------------------|-----|------|
| | | F , кН | M , кН·м | q , кН/м | a | b | c |
| 1 | I | 110 | 10 | 10 | 3,1 | 2,1 | 1,1 |
| 2 | II | 120 | 20 | 20 | 3,2 | 2,2 | 1,2 |
| 3 | III | 130 | 30 | 30 | 3,3 | 2,3 | 1,3 |
| 4 | IV | 140 | 40 | 40 | 3,4 | 2,4 | 1,4 |
| 5 | V | 150 | 50 | 50 | 3,5 | 2,5 | 1,5 |
| 6 | VI | 160 | 60 | 60 | 3,6 | 2,6 | 1,6 |
| 7 | VII | 170 | 70 | 70 | 3,7 | 2,7 | 1,7 |
| 8 | VIII | 180 | 80 | 80 | 3,8 | 2,8 | 1,8 |
| 9 | IX | 190 | 90 | 90 | 3,9 | 2,9 | 1, 9 |
| 0 | X | 100 | 100 | 100 | 3,0 | 2,0 | 1,0 |
| – | в | а | б | в | а | б | в |

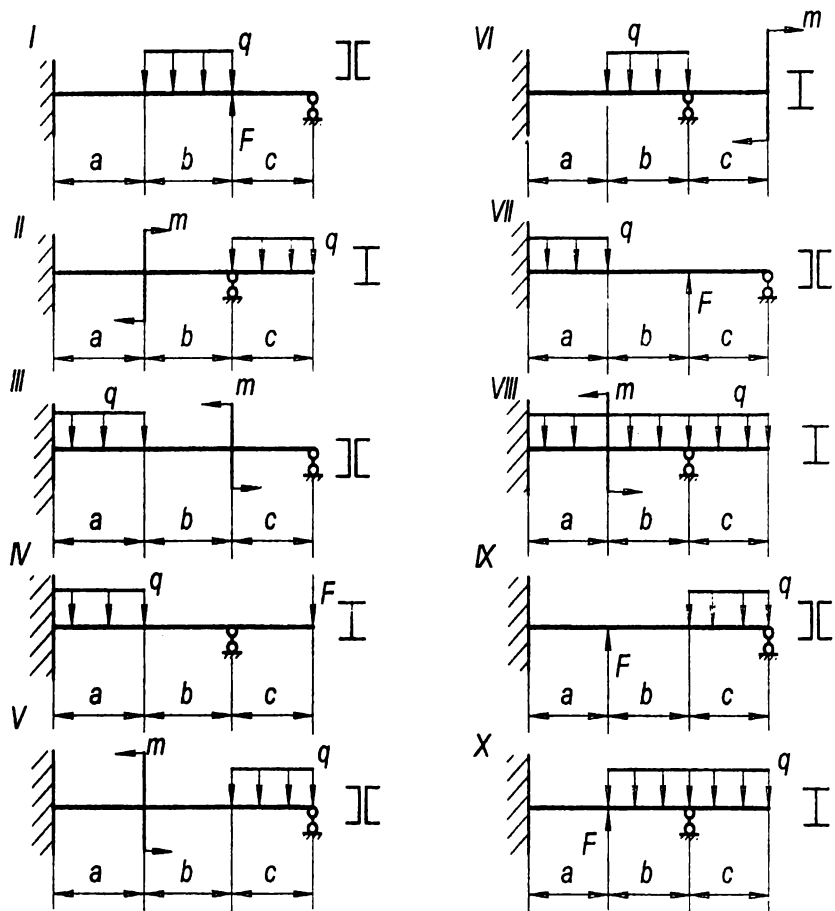


Рис. 33. Схемы балок к задаче 9

Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы называются статически неопределимыми и чем они отличаются от статически определимых систем?
2. Что такое основная система метода сил?
3. В чем заключается выбор основной системы?
4. Каков физический смысл уравнений деформаций?

Глава 8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ

8.1. Основные понятия

Сочетание изгиба и кручения стержней круглого сечения чаще всего встречается при расчете валов. При одновременной деформации изгиба с кручением внутренние усилия в поперечном сечении стержня приводятся к пяти компонентам: крутящему моменту M_k относительно оси x (рис. 34), изгибающим моментам M_y и M_z и поперечным силам Q_y и Q_z . Нормальные напряжения достигают наибольшего значения в крайних волокнах стержня (точки A и B , рис. 35), лежащих на концах диаметра, перпендикулярного к вектору результирующего изгибающего момента :

$$M_n = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}; \quad \sigma_n = \pm \frac{M_n}{W} = \pm \frac{M_n \cdot 32}{\pi \cdot d^3}.$$

Касательные напряжения, определяющие Q_y и Q_z , незначительны и их при расчете обычно не учитывают.

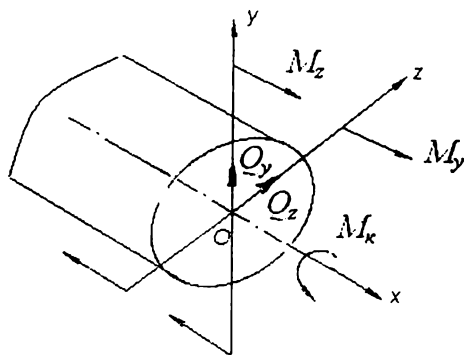


Рис. 34. Внутренние усилия в поперечном сечении
при одновременном действии деформации изгиба с кручением

Касательные напряжения от кручения достигают максимального значения во всех точках контура сечения.

$$\tau = \frac{M_k}{W_p}, \text{ или } \tau = \frac{M_k}{2W}, \text{ так как для круглого сечения } W_p = 2 \cdot W$$

(W_p – полярный, W – осевой моменты инерции сечения).

В опасных точках A и B главные нормальные напряжения σ_1 и σ_3 определяют по формуле $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$, а для проверки на прочность применяют одну из гипотез прочности.

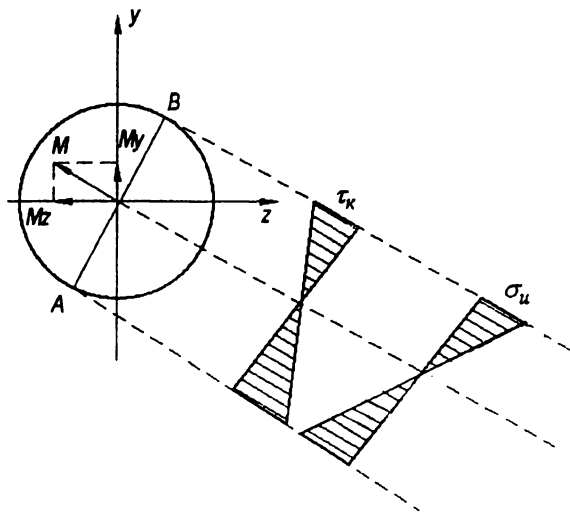


Рис. 35. Распределение касательных и нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением

Для пластичных материалов пользуются третьей или четвертой гипотезой прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = [\sigma].$$

Для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, когда $[\sigma_p]/[\sigma_c] = \nu$, пользуются гипотезой Мора:

$$\sigma_{\text{жв}}^{\nu} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p].$$

Выражая τ и σ через крутящий и изгибающий моменты и подставляя значения главных напряжений в $\sigma_{\text{жв}}$ для различных теорий прочности, расчетные формулы приведем к виду

$$\sigma_{\text{жв}} = \frac{M_{\text{жв}}}{W} \leq [\sigma],$$

где $M_{\text{жв}}$ – эквивалентный (расчетный) изгибающий момент:

– по третьей теории прочности $M_{\text{жв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_u^2 + M_k^2}$;

– по четвертой теории прочности $M_{\text{жв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_k^2}$;

– по теории Мора $M_{\text{жв}}^{\nu} = \frac{1-\nu}{2}M_u + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_u^2 + M_k^2}$.

8.2. Мощность при вращательном движении

Если вал машины передает скручивающий момент M_x , например, от мотора к станку, то значение момента зависит от передаваемой мощности и частоты вращения вала. Учитывая, что мощность равна работе в единицу времени $1\text{Вт} = 1\text{Нм/с}$, можно составить равенство

$$N = M_x \cdot \omega,$$

где N – мощность, Вт (кВт);

M_x – момент, Н·м;

ω – угловая скорость, 1/с: $\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}$.

Тогда скручивающий момент M_x определится по формуле

$$M_x = \frac{N}{\omega} = \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} = 9,55 \cdot \frac{N}{n},$$

где n – число оборотов в минуту, об/мин.

Пример 9

Подобрать диаметр вала d (рис. 36), если даны диаметры шкивов $D_1 = 0,20$ м, $D_2 = 0,6$ м; вес шкивов $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 4$ кН; натяжение ремней $T_1 = 8$ кН, $t_1 = 4$ кН, $T_2 = 10$ кН, $t_2 = 6$ кН; длина вала $l = 2$ м, угол наклона ремней второго шкива к оси Z $\alpha = 45^\circ$; допускаемое напряжение материала вала равно 100 МПа. Считать, что суммарный крутящий момент на шкивах полностью передается двигателю, подключенному в крайнем правом сечении вала.

Решение. Вследствие действия сил натяжения и собственного веса шкивов вал будет подвержен деформации изгиба в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а в результате разницы сил натяжения на каждом из шкивов появятся внешние скручивающие моменты, вызывающие кручение вала. Приводя силы натяжения ремней каждого шкива к центру сечения вала, находим внешние моменты M_{k1} и M_{k2} , вызывающие деформацию кручения:

$$M_{k1} = (T_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = (8 - 4) \cdot \frac{0,2}{2} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{k2} = (T_2 - t_2) \cdot \frac{D_2}{2} = (10 - 6) \cdot \frac{0,6}{2} = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определив значение внешних моментов, найдем направления действия M_{k1} и M_{k2} .

Так как внешние моменты определяются разницей сил натяжения на шкивах, то направления M_k определяются направлением большей силы натяжения. Так, $T_1 > t_1$, и поэтому M_{k1} направлен по часовой стрелке (см. рис.36). Составим расчетную схему при кручении (см. рис. 36, а). Построим эпюру крутящих моментов (см. рис. 36, б).

Теперь рассмотрим последовательно деформации изгиба в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Для составления расчетных

схем изгиба в этих двух плоскостях найдем проекции равнодействующих сил натяжения и веса шкивов на оси y и z . Снова определяем только значения этих проекций, а направление векторов сил учтем на расчетной схеме:

$$P_{y_1} = (T_1 + t_1) + P_1 = (8 + 4) + 2 = 14 \text{ кН};$$

$$P_{z_1} = 0;$$

$$P_{y_2} = (T_2 + t_2) \cdot \sin \alpha + P_2 = (10 + 6) \cdot \sin 45 + 4 = 15,3 \text{ кН};$$

$$P_{z_2} = (T_2 + t_2) \cdot \cos \alpha = 16 \cdot \cos 45 = 11,3 \text{ кН}.$$

Составляем расчетную схему изгиба в вертикальной плоскости (см. рис. 36, а) и строим эпюру изгибающих моментов M_z (см. рис. 36, г.). Аналогично определяются изгибающие моменты M_y от сил, действующих в горизонтальной плоскости.

Найдем опасное сечение, где $M_{\text{экв}}$ будет максимальным. В данном примере таким сечением будет сечение, где расположен второй шкив. В заданиях могут быть не такие очевидные случаи, поэтому надо сравнить значения $M_{\text{экв}}$, как правило, в двух сечениях и выбрать наибольшее.

В данном примере $M_{\text{экв}}$ найдем по третьей теории прочности:

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{5,65^2 + 4,15^2 + 1,6^2} = 7,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Диаметр вала d при $W_z = 0,1 \cdot d^3$:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{7,2 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 89,6 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр вала $d = 90 \text{ мм}$.

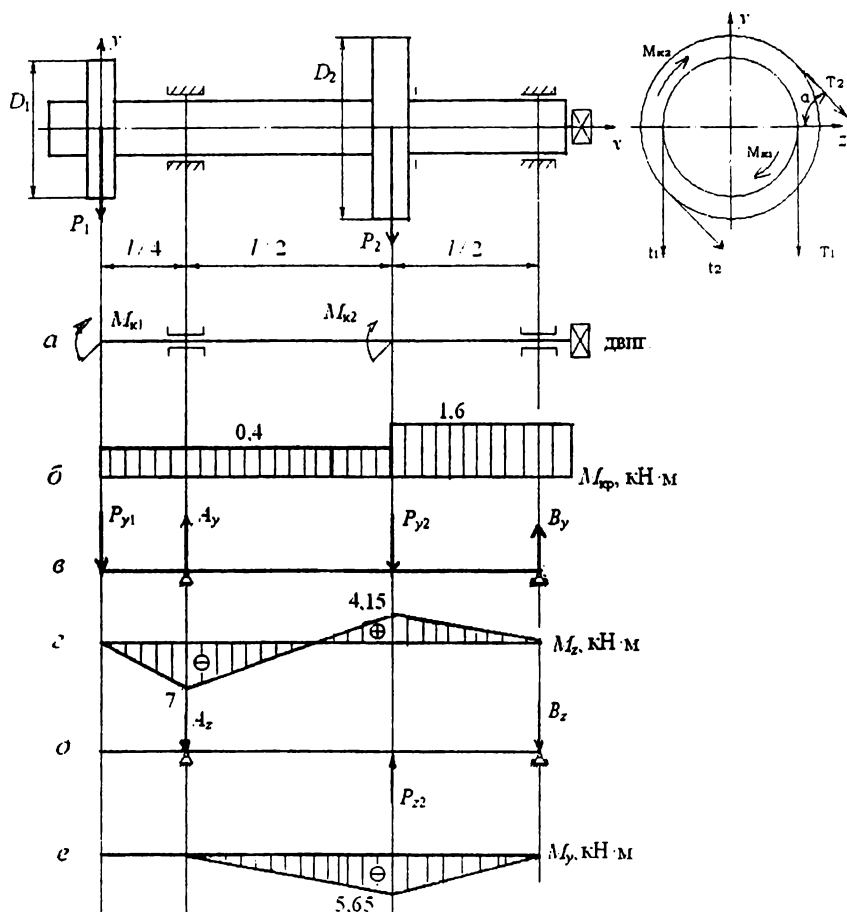


Рис. 36. Расчетные схемы и эпюры внутренних сил
при расчете вала на изгиб с кручением

Задача 10. Сложное сопротивление. Кручение и изгиб

Определить диаметр вала (рис. 37), если $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$. Считать, что суммарный крутящий момент на шкивах полностью передается двигателю, подключенному в крайнем правом сечении вала.

План решения:

- 1) построить эпюру крутящих моментов M_k ;
- 2) построить эпюры изгибающих моментов M_y и M_z ;
- 3) определить эквивалентный момент $M_{экв}$;
- 4) подобрать диаметр вала d . Собственным весом шкивов пренебречь.

Данные к задаче приведены в табл. 11.

Таблица 11

Данные к задаче 10

| Номер строки | Номер схемы | $l, \text{ м}$ | $T_1, \text{ кН}$ | $t_1, \text{ кН}$ | $T_2, \text{ кН}$ | $t_2, \text{ кН}$ | $D_1, \text{ м}$ | $D_2, \text{ м}$ | α° |
|--------------|-------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|----------------|
| 1 | I, а | 1,0 | 1 | 2 | 4 | 10 | 0,2 | 0,5 | 30 |
| 2 | I, б | 1,2 | 2 | 4 | 5 | 9 | 0,3 | 0,6 | 45 |
| 3 | II, а | 1,4 | 3 | 6 | 6 | 8 | 0,4 | 0,7 | 60 |
| 4 | II, б | 1,6 | 4 | 8 | 7 | 5 | 0,5 | 0,8 | 30 |
| 5 | III, а | 1,8 | 5 | 10 | 8 | 4 | 0,6 | 0,9 | 45 |
| 6 | III, б | 2,0 | 6 | 12 | 9 | 3 | 0,7 | 1,0 | 60 |
| 7 | II, б | 2,2 | 7 | 11 | 10 | 4 | 0,5 | 0,9 | 45 |
| 8 | I, а | 2,4 | 8 | 10 | 9 | 6 | 0,5 | 0,8 | 60 |
| 9 | III, б | 2,6 | 9 | 13 | 8 | 5 | 0,4 | 0,7 | 30 |
| 10 | III, а | 2,8 | 10 | 14 | 7 | 4 | 0,3 | 0,6 | 45 |
| — | в | а | б | в | А | б | в | а | б |

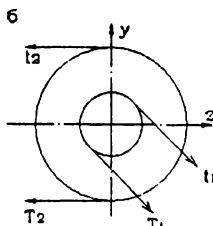
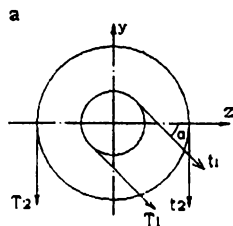
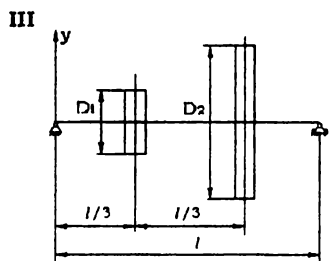
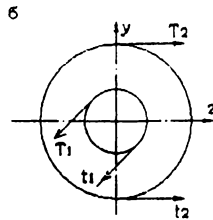
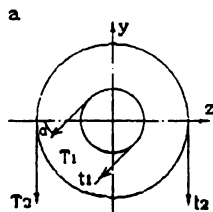
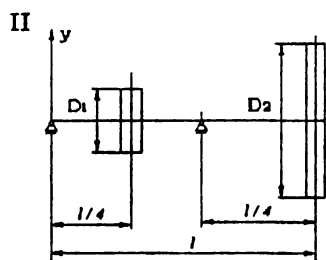
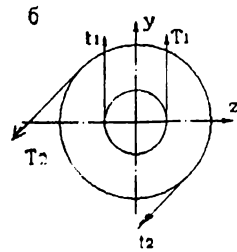
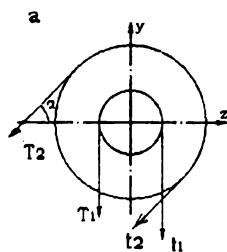
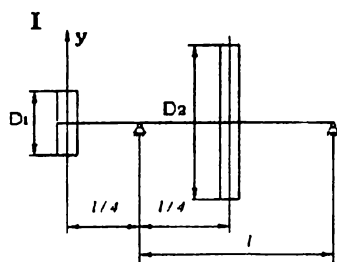


Рис. 37. Схемы к задаче 10

Вопросы для самоконтроля

1. В каких точках сечения сочетание напряжений получается наиболее опасным для прочности вала?
2. Как находится опасное сечение вала, работающего на изгиб и кручение?
3. Как определяется скручивающий момент по мощности, передаваемой валом, и по числу оборотов в минуту?

Глава 9. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Под действием сжимающей силы стержень может утратить первоначальную форму равновесия и искривиться. Произойдет потеря устойчивости стержня. Наименьшая сила, при которой происходит потеря устойчивости, называется критической и определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

где E – модуль упругости материала стержня;

I_{min} – минимальный осевой момент инерции сечения стержня;

μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня (рис. 38);

l – длина стержня, $\mu \cdot l = l_{пр}$ – приведенная длина стержня.

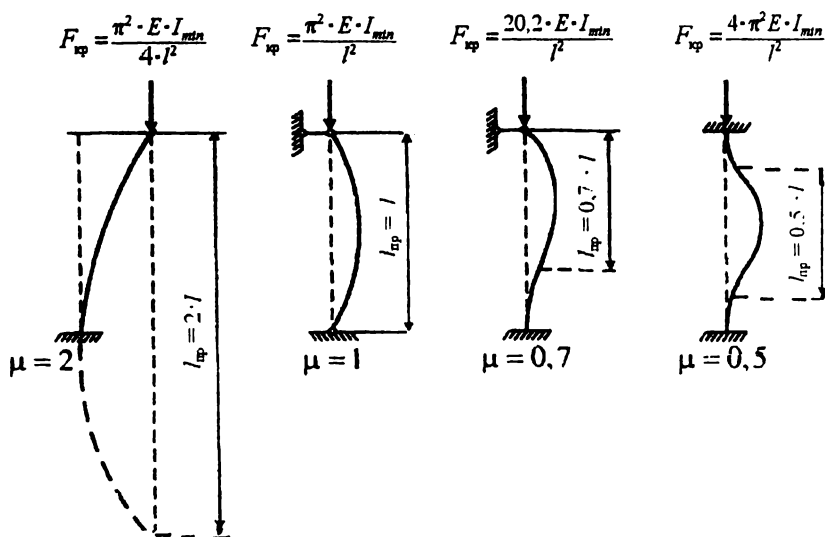


Рис. 38. Значения коэффициента μ приведенной длины и критической силы $F_{кр}$ для сжатых стержней при различных способах закрепления концов

Напряжения, вызванные критической силой, называются критическими и определяются по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где λ – гибкость стержня, $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$, ($i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции сечения);

A – площадь поперечного сечения стержня.

Формула Эйлера применима при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{пл}$. Обычно это условие выражают через гибкость стержня и записывают в виде

$$\lambda \geq \lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пл}}},$$

где $\lambda_{пр}$ – предельное значение гибкости, которое определяет границу применимости формулы Эйлера.

Формулой Эйлера можно пользоваться, если гибкость стержня $\lambda \geq \lambda_{пр}$, если $\lambda < \lambda_{пр}$, то пользоваться формулой Эйлера нельзя.

При значениях гибкости от 0 до $40 \div 50$ стержень настолько короткий, что практически разрушается при потере прочности, поэтому критическое напряжение равно пределу текучести: $\sigma_{кр} = \sigma_{т}$.

При значениях гибкости, лежащих в интервале $50 \leq \lambda < \lambda_{пр}$, стержень теряет устойчивость, деформируясь в упруго-пластической области, поэтому критическое напряжение $\sigma_{кр}$ определяют по эмпирической формуле Ф. С. Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2, \quad F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A,$$

где a, b, c – коэффициенты, зависящие от материала и имеющие размерность напряжения. Они приведены в табл. 12.

Таблица 12

Опытные коэффициенты для определения $\sigma_{кр}$, МПа

| Материал | a | b | c |
|------------------------------|------|-------|-------|
| Сталь Ст3 | 310 | 1,14 | 0 |
| Сталь Ст5 | 464 | 3,62 | 0 |
| Чугун | 776 | 12 | 0,053 |
| Сосна (сжатие вдоль волокон) | 29,3 | 0,194 | 0 |

Критическая сила является недопустимой для сжатых стержней.

Определение допускаемой сжимающей силы $[F]$ производят двумя способами. Первый способ используется, когда для рассчитываемого стержня известны длина, способ закрепления концов, форма и размеры поперечного сечения, материал, коэффициент запаса на устойчивость. Вначале определяют критическую силу $F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$, а затем допускаемую силу $[F]$:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[n_y]},$$

где $[n_y]$ – допускаемый коэффициент запаса на устойчивость.

Значения допускаемых коэффициентов запаса на устойчивость $[n_y]$ для различных материалов приведены в табл. 13.

**Допускаемые коэффициенты запаса на устойчивость
для различных материалов**

| Материал | $[n_y]$ |
|---------------------------------|-----------|
| Сталь Ст 3 | 1,8 ÷ 3 |
| Сталь Ст 5 | 1,8 ÷ 3 |
| Чугун | 5 ÷ 5,5 |
| Сосна (сжатие вдоль волокон) | 2,8 ÷ 3,2 |

Второй способ основан на применении таблиц $\varphi(\lambda)$. Сначала определяют гибкость стержня λ , затем по таблице находят $\varphi(\lambda)$ и вычисляют $[F]$ по формуле

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma_c] \cdot A,$$

где φ – коэффициент уменьшения допускаемого напряжения при сжатии $[\sigma_c]$.

Значения коэффициента φ в зависимости от гибкости λ и материала стержня приведены в табл. 14.

Для расчета критического напряжения, критической силы, допускаемой сжимающей силы и коэффициента запаса на устойчивость можно использовать блок-схему, представленную на рис. 39.

**Значение коэффициента продольного изгиба φ (λ)
для различных материалов**

| Гибкость λ | Значение φ (λ) | | | |
|--------------------|----------------------------------|-----------|-------|--------|
| | Сталь Ст3, Ст4 | Сталь Ст5 | Чугун | Дерево |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,97 | 0,96 | 0,91 | 0,97 |
| 30 | 0,95 | 0,93 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,89 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,85 | 0,57 | 0,80 |
| 60 | 0,86 | 0,80 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,74 | 0,34 | 0,60 |
| 80 | 0,75 | 0,67 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,59 | 0,20 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,50 | 0,16 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | 0,43 | – | 0,25 |
| 120 | 0,45 | 0,37 | – | 0,22 |
| 130 | 0,40 | 0,32 | – | 0,18 |
| 140 | 0,36 | 0,28 | – | 0,16 |
| 150 | 0,32 | 0,25 | – | 0,14 |
| 160 | 0,29 | 0,23 | – | 0,12 |
| 170 | 0,26 | 0,21 | – | 0,11 |
| 180 | 0,23 | 0,19 | – | 0,10 |
| 190 | 0,21 | 0,17 | – | 0,09 |
| 200 | 0,19 | 0,15 | – | 0,08 |
| 210 | 0,17 | 0,14 | – | – |
| 220 | 0,16 | 0,13 | – | – |

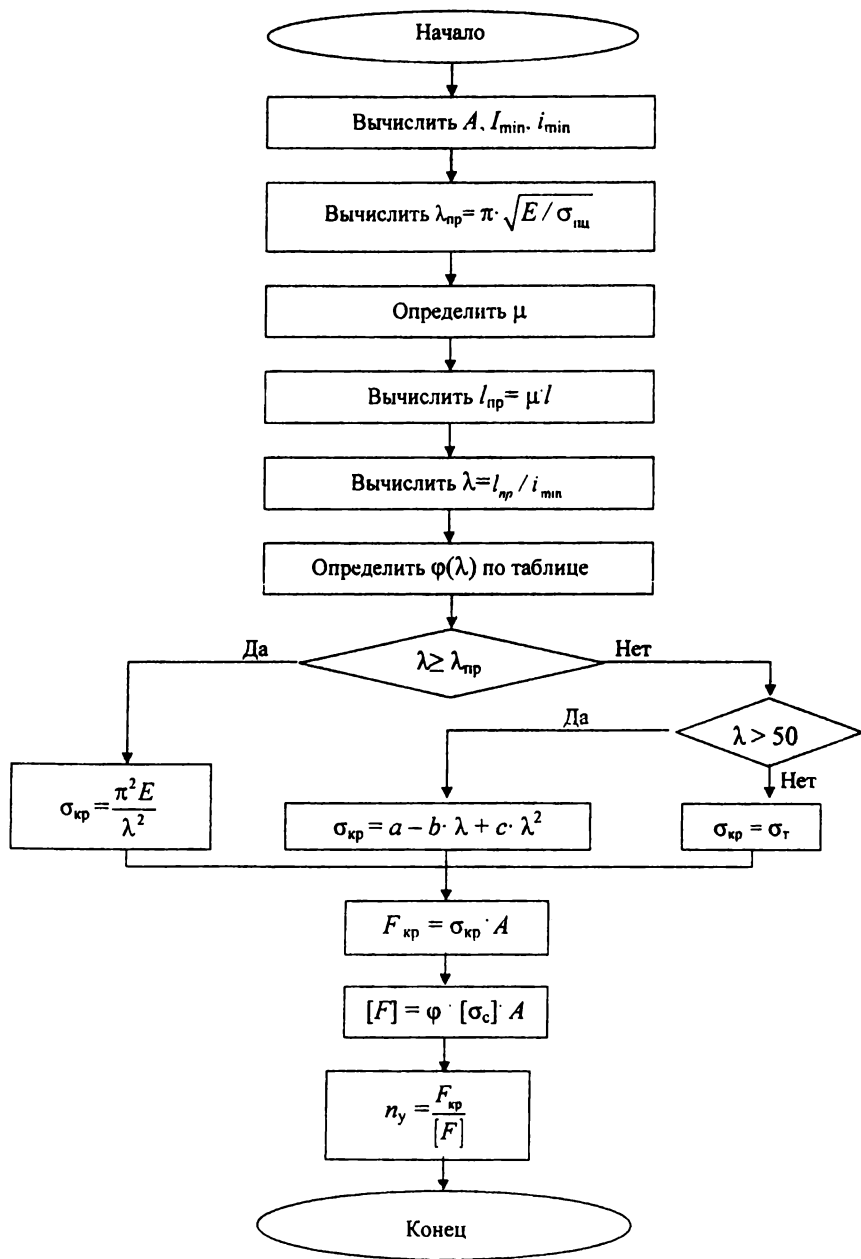


Рис. 39. Блок-схема вычисления $\sigma_{кр}$, $F_{кр}$, $[F]$ и n_y

Практически расчет на устойчивость ведется с использованием коэффициента φ – коэффициента уменьшения допускаемого напряжения при сжатии $[\sigma_c]$.

Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_c].$$

Расчет на устойчивость сводится к недопущению потери устойчивости, т.е. искривления стержня.

Подбор поперечного сечения стержня при заданных длине, сжимающей силе и материале выполняется с использованием таблиц значений $\varphi(\lambda)$ методом последовательных приближений в следующем порядке.

1. Задают произвольное значение φ . Например, полагают $\varphi = 0,5$.

2. Вычисляют допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_c].$$

3. Определяют площадь поперечного сечения из условия устойчивости:

$$A_{\text{доп}} \geq F / (\varphi \cdot [\sigma_c]).$$

4. Подбирают размеры сечения или номер профиля. Вычисляют площадь A , минимальный момент инерции I_{\min} , минимальный радиус инерции i_{\min} поперечного сечения.

5. Определяют гибкость стержня λ .

6. Если гибкость стержня $\lambda > 220$, то считают, что заданная сила F равна допускаемой $[F]$:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_y]},$$

где $F_{\text{кр}}$ – критическая сила (определяется по формуле Эйлера), а n_y – коэффициент запаса на устойчивость (выбирается по табл. 13).

Тогда можно определить значение наименьшего момента инерции I_{\min} по формуле

$$I_{\min} = \frac{F \cdot (\mu \cdot l)^2 \cdot n_y}{\pi^2 \cdot E}.$$

7. Если гибкость стержня $\lambda \leq 220$, то для полученной гибкости находят истинное значение φ'' .

8. Вычисляют действующее напряжение $\sigma = \frac{F}{A}$.

9. Вычисляют допускаемое напряжение $[\sigma_y] = \varphi'' \cdot [\sigma_c]$.

10. Сравнивают действующее напряжение с допускаемым, вычисляя относительную разницу k : $k = \frac{[\sigma_y] - \sigma}{[\sigma_y]} \cdot 100\%$.

11. Если $k > 0$, то имеем недонапряжение, если $k < 0$, то имеем перенапряжение.

12. Сечение считают подобранным, если σ и $[\sigma_y]$ отличаются не более, чем на 5%, т.е. $|k| \leq 5\%$.

13. Если $|k| > 5\%$, то в качестве второго приближения берут $\varphi_2 = \varphi + \varphi''$ и повторяют расчет, пока не будет выполняться условие $|k| \leq 5\%$.

Подбор сечения по изложенному алгоритму представлен в виде блок-схемы (рис. 40).

В сопротивлении стержней продольному изгибу основную роль играет гибкость стержня и, следовательно, величина наименьшего радиуса инерции сечения, поэтому существенным является вопрос не только величины площади сечения, как при расчете на прочность, но и формы поперечного сечения.

Для наиболее оптимального выбора сечения необходимо конструировать сечение так, чтобы при определенной площади

величина наименьшего радиуса инерции была бы возможно большей. Для этого прежде всего следует стремиться к тому, чтобы центральные моменты инерции сечения были равны. Такой стержень будет оказывать одинаковое сопротивление потере устойчивости в любом направлении.

Далее, необходимо стремиться к получению при данной площади наибольших центральных моментов инерции. Для этого надо разместить материал сечения по возможности дальше от центра тяжести. Этим условиям хорошо удовлетворяют трубчатое сечение или сечение, составленное из двух швеллеров, раздвинутых на определенное расстояние.

На выбор материала для сжатых стержней влияют два фактора:

1. Если $\sigma_{кр} < \sigma_{пл}$ (при большой гибкости), то единственной механической характеристикой, влияющей на устойчивость, является модуль продольной упругости E , а E мало зависит от марки стали. Поэтому для тонких и длинных стержней применяют низколегированные стали.

2. Для стержней средней и особенно малой гибкости $\sigma_{кр}$ существенно зависит от предела текучести или предела прочности материала. Применение высоколегированных сталей для этих стержней дает существенную экономию материала.

Значение проверки на устойчивость велико. Достаточно сказать, что все значительные катастрофы инженерных сооружений произошли вследствие потери устойчивости сжатых элементов конструкции. Особая опасность потери устойчивости заключается в том, что обычно она наступает внезапно.

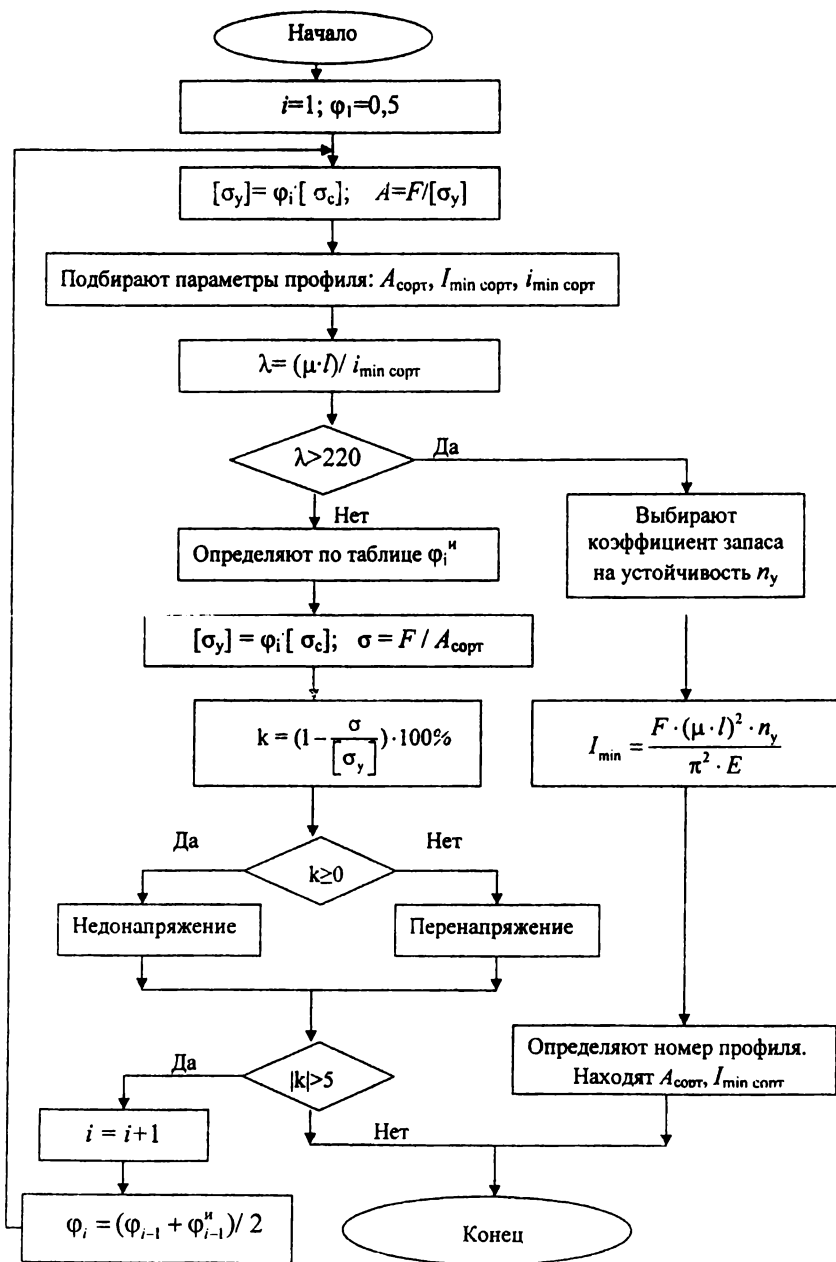


Рис. 40. Блок-схема подбора сечения из расчета на устойчивость

Пример 10

Определить величину $F_{кр}$ и $\sigma_{кр}$ для дюралюминиевого стержня кольцевого сечения: $D = 4$ см, $d = 3$ см, $E = 0,71 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{пл} = 180$ МПа, $l = 1,2$ м (рис. 41).

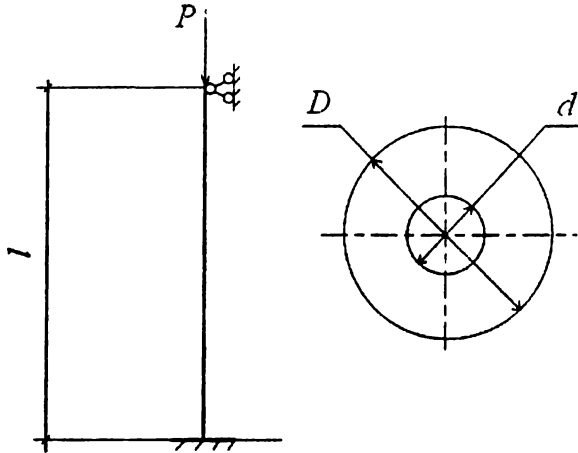


Рис 41. Определение критической силы для стержня кольцевого сечения

Осевой момент инерции кольцевого сечения стержня:

$$I = \frac{\pi P^4}{64} - \frac{\pi P^4}{64} = \frac{\pi}{64}(256 - 81) = \frac{175 \cdot \pi}{64} \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения стержня:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot (16 - 9) = \frac{7}{4} \cdot \pi \text{ см}^2.$$

Радиус инерции поперечного сечения:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{175\pi \cdot 7}{64 \cdot 4\pi}} = \frac{5}{4} \text{ см}.$$

При заданном способе закрепления концов стержня $\mu = 0,7$.

Гибкость стержня: $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{0,7 \cdot 120}{5/4} = 67,2$.

Критерий применимости формулы Эйлера :

$$\lambda_{\text{пр}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пу}}}} = 3,14 \sqrt{\frac{0,71 \cdot 10^5}{180}} = 62.$$

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пр}}$, то $F_{\text{кр}}$ можно определить по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_{\text{пр}}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0,71 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 175 \cdot 10^{-8}}{64 \cdot (0,7 - 1,2)^2} = 85,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 85,3 \text{ кН}.$$

Критическое напряжение:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{85,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{7 \cdot \pi} = 155 \text{ МПа}.$$

Пример 11

Колонна, составленная из двух швеллеров (рис. 42), нагружена силой $F = 200 \text{ кН}$, $l = 2,5 \text{ м}$.

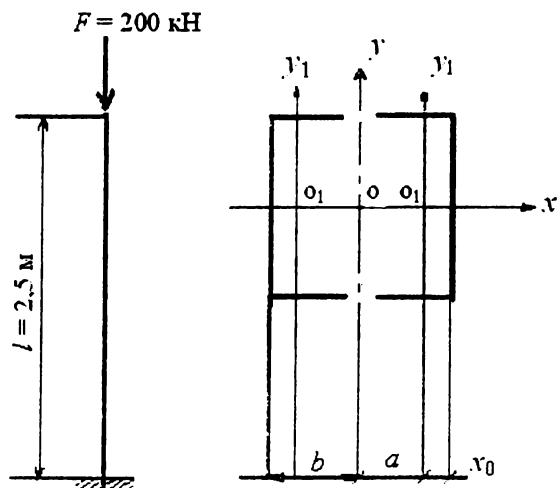


Рис. 42. Подбор поперечного сечения колонны
из расчета на устойчивость

Подобрать номер швеллера, если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

Сначала нужно выявить главную центральную ось заданного сечения из двух швеллеров с минимальным значением момента инерции. В нашем примере такой осью будет ось симметрии ou (см. рис. 42).

Момент инерции произвольного сечения относительно оси ou , параллельной главной оси сечения ou_1 и удаленной от нее на расстояние a , можно вычислить по формуле

$$I_y = I_{y_1} + a^2 \cdot A_0,$$

где A_0 – площадь сечения.

Так как наша колонна состоит из двух одинаковых швеллеров, состыкованных вплотную друг к другу, то

$$I_{\min} = I_y = 2 \cdot [I_{y_1} + (b - x_0)^2 \cdot A_0],$$

где A_0 – площадь одного швеллера.

Площадь всего сечения $A = A_0$.

Подбор размеров сечения ведется путем последовательного приближения. Обычно задают значение ϕ и определяют A . Для первого приближения примем произвольно $\phi_1 = 0,5$. Тогда из условия устойчивости

$$A = \frac{F}{\phi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ м}^2 = 19,0 \text{ см}^2.$$

По сортаменту (ГОСТ 8240 – 72) исследуем швеллер № 10:

$$A_0 = 10,9 \text{ см}^2, I_{y_1} = 20,4 \text{ см}^4, x_0 = 1,44 \text{ см}, b = 4,6 \text{ см}.$$

Для рассматриваемого сечения, состоящего из двух швеллеров № 10, имеем:

$$A = 2 \cdot 10,9 = 21,8 \text{ см}^2,$$

$$I_{\min} = 2 \cdot [20,4 + (4,6 - 1,44)^2 \cdot 10,9] = 259 \text{ см}^4.$$

$$\text{Гибкость колонны } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 250}{3,44} = 145,3. \text{ Для стержня с}$$

защемленным концом $\mu = 2$.

По таблице для стали марки Ст3, интерполируя, находим истинное значение φ для выбранного профиля $\varphi''_1 = 0,340$.

$$\text{Действующее напряжение: } \sigma = \frac{10^3 \cdot 200}{21,8 \cdot 10^{-4}} = 9,16 \cdot 10^7 \text{ Па} = 91,6 \text{ МПа},$$

допустимое напряжение $\varphi''_1 \cdot [\sigma] = 0,340 \cdot 210 = 71,4 \text{ МПа}$.

Перенапряжение составляет 28,4%.

Второе приближение.

$$\text{Задаемся } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi''_1}{2} = \frac{0,5 + 0,34}{2} = 0,42, \text{ тогда } A = 22,7 \text{ см}^2.$$

Исследуем швеллер № 12, $A_0 = 13,3 \text{ см}^2$, $I_{y1} = 31,2 \text{ см}^4$, $x_0 = 1,54 \text{ см}$,
 $b = 5,2 \text{ см}$.

Для сечения $A = 2 \cdot 13,3 = 26,6 \text{ см}^2$, $I_{\min} = 419 \text{ см}^4$, $i_{\min} = 3,97 \text{ см}$.

$$\text{Гибкость колонны } \lambda = \frac{2 \cdot 250}{3,97} = 125,9.$$

$$\text{Коэффициент } \varphi_2'' = 0,45 - \frac{0,45 - 0,40}{10} \cdot 5,9 = 0,421.$$

Напряжение в колонне:

$$\begin{aligned} \varphi_2'' \cdot [\sigma] &= 0,421 \cdot 210 = 88,4 \text{ МПа}, \\ \sigma &= \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^3}{26,6 \cdot 10^{-4}} = 7,52 \cdot 10^7 \text{ Па} = 75,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Недонапряжение составляет 15,1%.

Анализируя расчеты, заметим, что сечение из двух швеллеров № 10 дает большое перенапряжение, а из двух швеллеров № 12 – существенное недонапряжение. Уменьшить это недонапряжение мы не можем, так как ближайший стандартный профиль с меньшим поперечными размерами – это уже рассмотренный нами швеллер № 10.

Поскольку размеры сечений прокатных профилей от номера к номеру изменяются скачкообразно, во многих случаях не удастся подобрать такое сечение, чтобы расхождение в напряжениях не превышало 5 %.

Итак, принимаем сечение из двух швеллеров № 12.

Задача 11. Устойчивость сжатых стержней

Выполнить расчет на устойчивость центрального сжатого стержня из стали марки Ст3, имеющего двутавровое сечение (рис. 43), если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$. Данные к задаче приведены в табл. 15.

План решения задачи:

1) при предварительно заданном значении $\varphi_1 = 0,5$ определить размеры поперечного сечения (номер двутавра);

2) проверить устойчивость стержня при предварительно вычисленных размерах сечения;

3) если устойчивость стержня не обеспечивается или имеет место большое недонапряжение, произвести повторный расчет с новым значением:

$$\varphi_{i+1} = \frac{\varphi_i + \varphi_i''}{2};$$

4) повторять п. 3, пока не будет найден оптимальный номер двутавра.

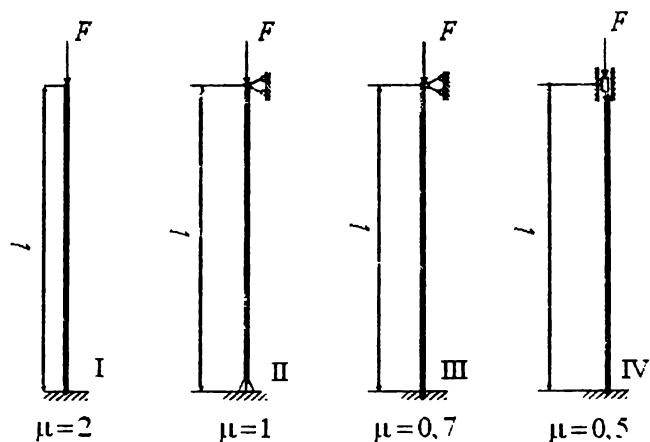


Рис. 43. Схемы к задаче 11

Таблица 15

Данные к задаче 11

| Номер строки | Номер схемы | F , кН | l , м |
|--------------|-------------|----------|---------|
| 1 | I | 100 | 4,1 |
| 2 | II | 200 | 4,2 |
| 3 | III | 300 | 4,3 |
| 4 | IV | 400 | 4,4 |
| 5 | I | 500 | 4,5 |
| 6 | II | 600 | 4,6 |
| 7 | III | 700 | 4,7 |
| 8 | IV | 800 | 4,8 |
| 9 | I | 900 | 4,9 |
| 10 | II | 1000 | 5,0 |
| — | в | б | а |

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется критической силой?
2. Как определяется запас устойчивости?
3. Как учитывается влияние способа закрепления концов сжатого бруса на величину критической силы?
4. Что называется коэффициентом длины и как он определяется?
5. Что называется гибкостью сжатого бруса и как она определяется?
6. На чем основывается установление границ применимости формулы Эйлера?
7. Два стержня шарнирно оперты по концам и сжаты силами F . Поперечное сечение одного из них круглое, а другого – квадратное. Для какого из стержней критическая сила окажется больше, если модуль упругости, длина и площадь поперечного сечения у них одинаковы?

Глава 10. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

Под действием нагрузки элементы конструкции деформируются и перемещаются. Перемещения происходят с ускорением, отчего возникают силы инерции.

При статическом действии нагрузка изменяется медленно. Ускорения перемещений элементов конструкций, а, следовательно, и силы инерции весьма малы и поэтому их можно не учитывать.

При динамическом действии нагрузка изменяется быстро, воздействует резко. Перемещения элементов конструкции происходят с заметным ускорением. Возникающие силы инерции существенны и подлежат учету.

Усилия, напряжения и перемещения от динамического действия нагрузки в K_d раз больше, чем от статического действия той же нагрузки:

$$\Phi_d = \Phi_{ст} \cdot K_d,$$

где Φ_d – фактор от динамического действия нагрузки;

$\Phi_{ст}$ – фактор от статического действия той же нагрузки;

K_d – коэффициент динамичности.

Для учета сил инерции при подъеме груза с ускорением

$$K_d = 1 + \frac{a}{g},$$

где a – ускорение, с которым движется груз;

g – ускорение свободного падения.

При ударном действии груза (без учета массы ударяемого элемента)

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}},$$

где H – высота падения груза;

$\delta_{\text{ст}}$ – перемещение точки приложения груза от его статического действия.

При продольном ударе $\delta_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{ст}}$.

При поперечном (изгибающем) ударе $\delta_{\text{ст}} = y_{\text{ст}}$.

Пример 12

Груз весом 500 Н падает с высоты 65 см на деревянную балку длиной 3 м и сечением 12 x 20 см (рис. 44). Проверить прочность балки, если $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ и $E = 1 \text{ ГПа}$.

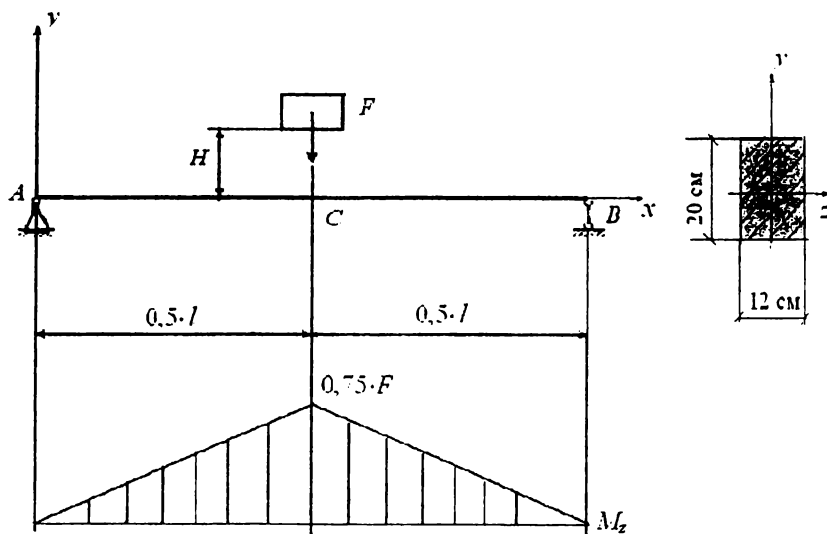


Рис. 44. Удар груза по балке

Балка подвергается поперечному (изгибающему) удару.

Условие прочности балки:

$$\sigma_a = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_d \leq [\sigma].$$

Напряжение в балке от статического действия груза:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{M_z \cdot 6}{b \cdot h^2} = \frac{0,75 \cdot 500 \cdot 6}{12 \cdot 10^{-2} \cdot (20 \cdot 10^{-2})^2} = 0,469 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,469 \text{ МПа}.$$

Для определения коэффициента динамичности необходимо знать величину прогиба в точке приложения груза от его статического действия. Воспользуемся методом начальных параметров и составим уравнение прогибов:

$$E \cdot I_z \cdot y = E \cdot I_z \cdot y_0 + E \cdot I_z \cdot \varphi_0 \cdot x + \frac{F \cdot x^3}{2 \cdot 6} \Big|_{x>0} - \frac{F \cdot (x - 0,5 \cdot l)^3}{6} \Big|_{x>0,5l}.$$

Так как начало отчета абсциссы x принято на опоре A , начальный прогиб $y_0 = 0$. Определим $E \cdot I_z \cdot \varphi_0$:

$$\text{При } x = l \quad E \cdot I_z \cdot y_B = E \cdot I_z \cdot \varphi_0 \cdot l + \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot 6} \Big|_{x>0} - \frac{F \cdot (l - 0,5 \cdot l)^3}{6} \Big|_{x>0,5l} = 0.$$

$$\text{откуда } E \cdot I_z \cdot \varphi_0 = -\frac{F \cdot l^2}{16}.$$

$$\text{При } x = \frac{l}{2} \quad E \cdot I_z \cdot y_C = -\frac{F \cdot l^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{F \cdot l^3}{2 \cdot 8 \cdot 6} = -\frac{F \cdot l^3}{48}.$$

Прогиб при $x = \frac{l}{2}$ в точке C равен

$$\begin{aligned} y_C &= -\frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_z} = -\frac{F \cdot l^3 \cdot 12}{48 \cdot E \cdot b \cdot h^3} = \\ &= -\frac{500 \cdot 3^3 \cdot 12}{48 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot (20 \cdot 10^{-2})^3} = -0,352 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \end{aligned}$$

Коэффициент динамичности:

$$K_y = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{|y_0|}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 65}{0,352}} = 20,2.$$

Динамическое напряжение:

$$\sigma_d = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_y = 0,469 \cdot 20,2 = 9,47 \text{ МПа} < [\sigma_n] = 10 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

Задача 12. Динамическое действие нагрузок

Произвести расчет балки при ударном действии груза весом P (рис.45). Материал балки – сталь, $[\sigma_{\text{н}}] = 210 \text{ МПа}$. Данные к задаче приведены в табл. 16.

Таблица 16

Данные к задаче 12

| Номер строки | Номер схемы | Вес груза P , кН | Номер двутавра | Длина l , м | Высота падения H , м |
|--------------|-------------|--------------------|----------------|---------------|------------------------|
| 1 | I | 1,10 | 22 | 2,1 | 11 |
| 2 | II | 1,20 | 22а | 2,2 | 12 |
| 3 | III | 0,30 | 24 | 2,3 | 13 |
| 4 | IV | 0,40 | 24а | 2,4 | 4 |
| 5 | V | 0,50 | 27 | 2,5 | 5 |
| 6 | VI | 0,60 | 27а | 2,6 | 6 |
| 7 | VII | 0,70 | 30 | 2,7 | 7 |
| 8 | VIII | 0,80 | 30а | 2,8 | 8 |
| 9 | IX | 0,90 | 33 | 2,9 | 9 |
| 0 | X | 1,00 | 36 | 3,0 | 10 |
| – | в | б | а | в | в |

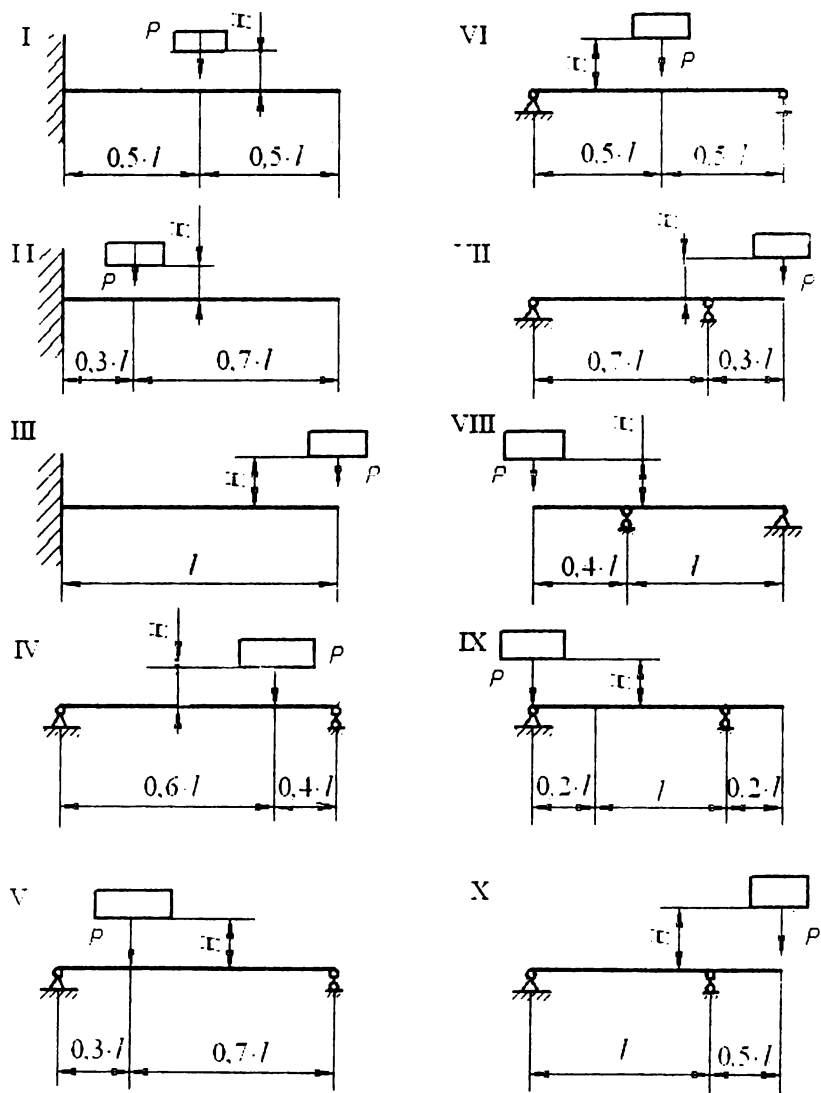


Рис. 45. Схемы балок к задаче 12

План решения задачи:

- 1) определить максимальное нормальное напряжение в балке при статическом действии веса P ;
- 2) определить прогиб балки в точке приложения веса P от статического его действия;
- 3) вычислить динамический коэффициент;
- 4) вычислить максимальное нормальное напряжение от динамического действия веса P и сделать заключение о прочности балки;
- 5) вычислить прогиб от динамического действия веса P в точке его приложения.

Примечание. Прогиб от статического действия груза весом P (в точке его приложения) определить по следующей формуле, взятой из справочника:

– в схемах I – III: $y = \frac{P \cdot a^3}{3E \cdot I_z};$

– в схемах IV – VI: $y = \frac{P \cdot a^2}{3E \cdot I_z \cdot l}(l - a)^2;$

– в схемах VII – X: $y = \frac{P \cdot a^2}{3E \cdot I_z}(l + a)^2.$

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается динамическое нагружения от статического?
2. Что такое динамический коэффициент и чему он равен при подъеме груза с постоянным ускорением?
3. Что такое удар? Какие допущения используются при определении динамического коэффициента при ударе?
4. Запишите формулу для динамического коэффициента при ударе. Объясните влияние на него величины $\delta_{ст}$.

Заключение

В пособии изложены основные теоретические положения по простым и сложным видам деформации, напряженному и деформированному состоянию в точке, устойчивости сжатых стержней и динамическому действию нагрузок. Рассмотрены также такие темы курса «Сопротивление материалов», как «Метод расчета на прочность по допускаемым напряжениям», «Статически неопределимые системы при растяжении - сжатии и при изгибе», «Определение моментов инерции плоских сечений».

Приведены решения типовых задач по указанным разделам. В некоторых задачах представлены различные способы их решения. Составлены задания для выполнения контрольных работ. Разработана схема выбора индивидуального задания для студентов, в основу которой положен номер зачетной книжки студента.

Вопросы для самоконтроля позволяют студентам проверить усвоение изучаемого материала.

Библиографический список

1. *Александров А.В.* Сопротивление материалов [Текст] /А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин.– М.: Высш.шк., 2004. – 560 с.
2. *Ицкович Г.М.* Сопротивление материалов [Текст]:учеб./ Г.М. Ицкович. – 8-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 320 с.
3. *Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов»* [Текст]/ сост. Е.Д. Колегова, З.А. Наседкина. – Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2005. – 107 с.
4. *Степин П.А.* Сопротивление материалов. [Текст]/ П.А. Степин. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 320 с.
5. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов [Текст]: учеб.для вузов/ В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 624 с.

Указания по выполнению контрольных работ

Контрольные работы являются индивидуальными. Номер расчетной схемы и числовые данные определяются тремя последними цифрами номера зачетной книжки (шифра) студента и первыми тремя буквами русского алфавита, которые располагаются под шифром, например:

0 7 7 0 1 5

а б в

Номер схемы и числовые данные берутся из таблиц в зависимости от связи цифры шифра с буквой, написанной под ней (в примере 2 (см. п.2.2) — 0а, 1б, 5в). Так, для шифра 077015 из табл. 1 к задаче 1 (см. п.2.1) следует взять: схему V (5в), $F_1 = 2000$ кН (0а), $F_2 = 2100$ кН (1б), $F_3 = 1500$ кН (5в). Определяющей при считывании исходных данных является схема задачи (рис. 5, 7, 12, 17, 22, 28, 29, 31, 33, 37, 43, 45), т.е. из табл. 1– 5, 7– 11, 15, 16 нужно брать значения лишь тех нагрузок, которые указаны на схеме. Работы, выполненные с нарушением этих требований, не рассматриваются.

В заголовке контрольной работы должны быть четко написаны: номер контрольной работы; название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы; номер зачетной книжки и точный почтовый адрес.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На каждой странице должны быть поля в 3 – 4 см, и 1 – 2 страницы в конце работы нужно отвести для замечаний преподавателя.

Чертежи к задачам выполняются карандашом на отдельной странице тетради или миллиметровой бумаге с соблюдением масштаба изображения. Выявленные преподавателем ошибки исправляются на отдельных листах, которые вкладываются в соответствующие места

контрольной работы. В самой незачтенной работе ничего не меняется. Все выполненные студентом и зачтенные преподавателем контрольные работы должны быть представлены на зачете или экзамене.

**Перечень контрольных заданий
(номера и названия задач)**

✓ Задание 1

1. Растяжение и сжатие (статически определяемая система).
2. Растяжение и сжатие (статически неопределимая система).
3. Плоское напряженное состояние.

(Задание 2

4. Кручение стержней с круглым сечением.
5. Моменты инерции плоских сечений.

Задание 3

6. Плоский изгиб (консольная балка).
7. Плоский изгиб (двухопорная балка).

Задание 4

8. Определение перемещений при плоском изгибе.
9. Расчет статически неопределимой балки.

Задание 5

10. Сложное сопротивление. Кручение и изгиб.
11. Устойчивость сжатых стержней.
12. Динамическое действие нагрузок.

Значения механических характеристик**для различных материалов, МПа**

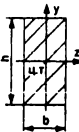



| Материал | $\sigma_{\text{тл}}$ | E |
|------------------------|----------------------|-------------------|
| Сталь Ст3 | 200 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| Сталь Ст5 | 240 | $2,0 \cdot 10^5$ |
| Никелевая сталь (3,5%) | 490 | $2,15 \cdot 10^5$ |
| Медь | – | $2,15 \cdot 10^5$ |
| Алюминий и дюралюминий | 170 | $0,7 \cdot 10^5$ |
| Бронза | – | $1,3 \cdot 10^5$ |
| Чугун | 180 | $1,2 \cdot 10^5$ |
| Дерево: | | |
| сосна вдоль волокон | 20 | $0,1 \cdot 10^5$ |
| ель вдоль волокон | 13 | $0,1 \cdot 10^5$ |

Модуль упругости стали при сдвиге $8,0 \cdot 10^4$ МПа

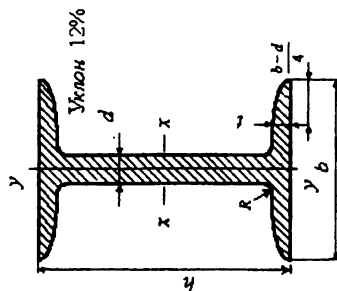
Коэффициент Пуассона для стали 0,3

Удельная сила тяжести стали $78,5 \text{ кН/м}^3$

Геометрические характеристики поперечных сечений

| Тип сечения | Площадь поперечного сечения $A, \text{см}^2$ | Осевые моменты инерции | | Осевые моменты сопротивления | | Полярный момент инерции $I_p, \text{см}^4$ | Полярный момент сопротивления $W_p, \text{см}^3$ |
|--|---|------------------------------------|--------------------------|--|-------------------------|---|---|
| | | $I_z, \text{см}^4$ | $I_y, \text{см}^4$ | $W_z, \text{см}^3$ | $W_y, \text{см}^3$ | | |
| Прямоугольник  | $b \cdot h$ | $\frac{b \cdot h^3}{12}$ | $\frac{b^3 \cdot h}{12}$ | $\frac{b \cdot h^2}{6}$ | $\frac{b^2 \cdot h}{6}$ | — | — |
| Квадрат  | a^2 | $I_z = I_y$ | | $W_z = W_y$ | | — | — |
| | | $\frac{a^4}{12}$ | | $\frac{a^3}{6}$ | | | |
| Круг  | $\frac{\pi \cdot d^2}{4}$ | $\frac{\pi \cdot d^4}{64}$ | | $\frac{\pi \cdot d^3}{32}$ | | $\frac{\pi \cdot d^4}{32}$ | $\frac{\pi \cdot d^3}{16}$ |
| Кольцевое сечение  | $\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$ | $\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$ | | $\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$ | | $\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$ | $\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$ |

Сортамент прокатной стали
Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (ГОСТ 8239 – 72)



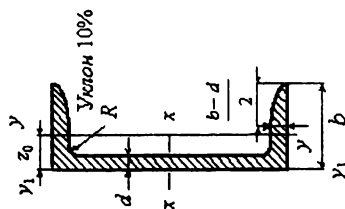
h – высота балки
 b – ширина полки
 I – момент инерции
 d – толщина стенки
 W – момент сопротивления
 t – средняя толщина полки
 S – статический момент площади полуторсечения
 R – радиус внутреннего закругления
 i – радиус инерции

| Номер профиля | Размеры, мм | | | | Площадь сечения A , см^2 | I_x , см^4 | W_x , см^3 | i_x , см | Sx , см^3 | I_y , см^4 | W_y , см^3 | i_y , см | Масса I пог.м., кг |
|---------------|-------------|-----|-----|-----|-------------------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|
| | h | b | d | t | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 10 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 12,0 | 198 | 39,7 | 4,06 | 23,0 | 17,9 | 6,49 | 1,22 | 9,46 |
| 12 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 14,7 | 350 | 58,4 | 4,88 | 33,7 | 27,9 | 8,72 | 1,38 | 11,50 |
| 14 | 140 | 73 | 4,9 | 7,5 | 17,4 | 572 | 81,7 | 5,73 | 46,8 | 41,9 | 11,50 | 1,55 | 13,70 |
| 16 | 160 | 81 | 5,0 | 7,8 | 20,2 | 873 | 109,0 | 6,57 | 62,3 | 58,6 | 14,50 | 1,70 | 15,90 |
| 18 | 180 | 90 | 5,1 | 8,1 | 23,4 | 1290 | 143,0 | 7,42 | 81,4 | 82,6 | 18,40 | 1,88 | 18,40 |
| 18a | 180 | 100 | 5,1 | 8,3 | 25,4 | 1430 | 159,0 | 7,51 | 89,8 | 114,0 | 22,80 | 2,12 | 19,90 |
| 20 | 200 | 100 | 5,2 | 8,4 | 26,8 | 1840 | 184,0 | 8,28 | 104,0 | 115,0 | 23,10 | 2,07 | 21,00 |
| 20a | 200 | 110 | 5,2 | 8,6 | 28,9 | 2030 | 203,0 | 8,37 | 114,0 | 155,0 | 28,20 | 2,32 | 22,70 |
| 22 | 220 | 110 | 5,4 | 8,7 | 30,6 | 2550 | 232,0 | 9,13 | 131,0 | 157,0 | 8,60 | 2,27 | 24,00 |

Окончание табл. 1

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-----|-----|-----|------|------|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|------|--------|
| 22a | 220 | 120 | 5,4 | 8,9 | 32,8 | 2790 | 254,0 | 9,22 | 143,0 | 206,0 | 34,30 | 2,50 | 25,80 |
| 24 | 240 | 115 | 5,6 | 9,5 | 34,8 | 3460 | 289,0 | 9,97 | 163,0 | 198,0 | 34,50 | 2,37 | 27,30 |
| 24a | 240 | 125 | 5,6 | 9,8 | 37,5 | 3800 | 317,0 | 10,10 | 178,0 | 260,0 | 41,60 | 2,63 | 29,40 |
| 27 | 270 | 125 | 6,0 | 9,8 | 40,2 | 5010 | 371,0 | 11,20 | 210,0 | 260,0 | 41,50 | 2,54 | 31,50 |
| 27a | 270 | 135 | 6,0 | 10,2 | 43,2 | 5500 | 407,0 | 11,30 | 229,0 | 337,0 | 50,00 | 2,80 | 33,90 |
| 30 | 300 | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5 | 7080 | 472,0 | 12,30 | 268,0 | 337,0 | 49,90 | 2,69 | 36,50 |
| 30a | 300 | 145 | 6,5 | 10,7 | 49,9 | 7780 | 518,0 | 12,50 | 292,0 | 436,0 | 60,10 | 2,95 | 39,20 |
| 33 | 330 | 140 | 7,0 | 11,2 | 53,8 | 9840 | 597,0 | 13,50 | 339,0 | 419,0 | 59,90 | 2,79 | 42,20 |
| 36 | 360 | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9 | 13380 | 743,0 | 14,70 | 423,0 | 516,0 | 71,10 | 2,89 | 48,60 |
| 40 | 400 | 155 | 8,3 | 13,0 | 72,6 | 19062 | 953,0 | 16,20 | 545,0 | 667,0 | 86,10 | 3,03 | 57,00 |
| 45 | 450 | 160 | 9,0 | 14,2 | 84,7 | 27696 | 1231,0 | 18,10 | 708,0 | 808,0 | 101,00 | 3,09 | 66,50 |
| 50 | 500 | 170 | 10,0 | 15,2 | 100,0 | 39727 | 1589,0 | 19,90 | 919,0 | 1043,0 | 123,00 | 3,23 | 78,50 |
| 55 | 550 | 180 | 11,0 | 16,5 | 118,0 | 55962 | 2035,0 | 21,80 | 1181,0 | 1356,0 | 151,00 | 3,39 | 92,60 |
| 60 | 600 | 190 | 12,0 | 17,8 | 138,0 | 76806 | 2560,0 | 23,60 | 1491,0 | 1725,0 | 182,00 | 3,54 | 108,00 |

Сталь горячекатаная. Швеллеры (ГОСТ 8240-72)



h – высота швеллера
 b – ширина полки
 d – толщина стенки
 t – средняя толщина полки
 R – радиус внутреннего закругления
 I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади полусечения
 i – радиус инерции
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки

| Номер про- филя | Масса 1 пог. м, кг | Размеры, мм | | | | | Пло- щадь сечения | Справочные величины для осей | | | | | | | z ₀ , см |
|-----------------------|--------------------------|-------------|----|-----|-----|-------------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|------|------------------------|
| | | h | b | d | t | x - x | | | | y - y | | | | | |
| | | | | | | I _x , см ⁴ | | W _x , см ³ | i _x , см | S _x , см ³ | I _y , см ⁴ | W _y , см ³ | i _y , см | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| 5 | 4,80 | 50 | 32 | 4,4 | 7,0 | 6,16 | 22,8 | 9,1 | 1,92 | 5,59 | 5,61 | 2,75 | 0,954 | 1,16 | |
| 6,5 | 5,90 | 65 | 36 | 4,4 | 7,2 | 7,51 | 48,6 | 15,0 | 2,54 | 9,00 | 8,70 | 3,68 | 1,080 | 1,24 | |
| 8 | 7,05 | 80 | 40 | 4,5 | 7,4 | 8,98 | 89,4 | 22,4 | 3,16 | 13,30 | 12,80 | 4,75 | 1,190 | 1,31 | |
| 10 | 8,59 | 100 | 46 | 4,5 | 7,6 | 10,90 | 174,0 | 34,8 | 3,99 | 20,40 | 20,40 | 6,46 | 1,370 | 1,44 | |
| 12 | 10,40 | 120 | 52 | 4,8 | 7,8 | 13,30 | 304,0 | 50,6 | 4,78 | 29,60 | 31,20 | 8,52 | 1,530 | 1,54 | |
| 14 | 12,30 | 140 | 58 | 4,9 | 8,1 | 15,60 | 491,0 | 70,2 | 5,60 | 40,80 | 45,40 | 11,00 | 1,700 | 1,67 | |
| 14a | 13,30 | 140 | 62 | 4,9 | 8,7 | 17,00 | 545,0 | 77,8 | 5,66 | 45,10 | 57,50 | 13,30 | 1,840 | 1,87 | |

Окончание табл. 2

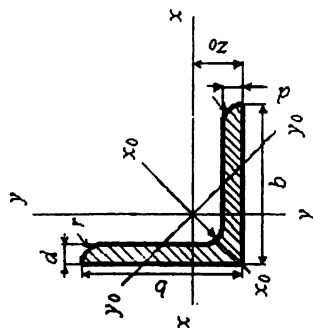
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | II | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-----|-------|-----|-----|-----|------|-------|---------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|------|
| 16 | 14,20 | 160 | 64 | 5,0 | 8,4 | 18,10 | 747,0 | 93,4 | 6,42 | 54,10 | 63,30 | 13,80 | 1,870 | 1,80 |
| 16a | 15,30 | 160 | 68 | 5,0 | 9,0 | 19,50 | 823,0 | 103,0 | 6,49 | 59,40 | 78,80 | 15,40 | 2,010 | 2,00 |
| 18 | 16,30 | 180 | 70 | 5,1 | 8,7 | 20,70 | 1090,0 | 121,0 | 7,24 | 69,80 | 86,00 | 17,00 | 2,040 | 1,94 |
| 18a | 17,40 | 180 | 74 | 5,1 | 9,3 | 22,20 | 1190,0 | 132,0 | 7,32 | 76,10 | 105,00 | 20,00 | 2,180 | 2,13 |
| 20 | 18,40 | 200 | 76 | 5,2 | 9,0 | 23,40 | 1520,0 | 152,0 | 8,07 | 87,80 | 113,00 | 20,50 | 2,200 | 2,07 |
| 20a | 19,80 | 200 | 80 | 5,2 | 9,7 | 25,20 | 1670,0 | 167,0 | 8,15 | 95,90 | 139,00 | 24,20 | 2,350 | 2,28 |
| 22 | 21,00 | 220 | 82 | 5,4 | 9,5 | 26,70 | 2110,0 | 192,0 | 8,89 | 110,00 | 151,00 | 25,10 | 2,370 | 2,21 |
| 22a | 22,60 | 220 | 87 | 5,4 | 10,2 | 28,80 | 2330,0 | 212,0 | 8,99 | 121,00 | 187,00 | 30,00 | 2,550 | 2,46 |
| 24 | 24,00 | 240 | 90 | 5,6 | 10,0 | 30,60 | 2900,0 | 242,0 | 9,73 | 139,00 | 208,00 | 31,60 | 2,600 | 2,42 |
| 24a | 25,80 | 240 | 95 | 5,6 | 10,0 | 32,90 | 3180,0 | 265,0 | 9,84 | 151,00 | 254,00 | 37,20 | 2,780 | 2,67 |
| 27 | 27,70 | 270 | 95 | 6,0 | 10,5 | 35,20 | 4160,0 | 308,0 | 10,90 | 178,00 | 262,00 | 37,30 | 2,730 | 2,47 |
| 30 | 31,80 | 300 | 100 | 6,5 | 11,0 | 40,50 | 5810,0 | 387,0 | 12,00 | 224,00 | 327,00 | 43,60 | 2,840 | 2,52 |
| 33 | 36,50 | 330 | 105 | 7,0 | 11,7 | 46,50 | 7980,0 | 484,0 | 13,10 | 281,00 | 410,00 | 51,80 | 2,970 | 2,59 |
| 36 | 41,90 | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 53,40 | 10820,0 | 601,0 | 14,20 | 350,00 | 513,00 | 61,70 | 3,100 | 2,68 |
| 40 | 48,30 | 400 | 115 | 8,0 | 13,5 | 61,50 | 15220,0 | 761,0 | 15,70 | 444,00 | 642,00 | 73,40 | 3,230 | 2,75 |

Таблица 3

Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8509-72)

I — момент инерции
 i — радиус инерции
 z_0 — расстояние от центра тяжести
 до наружной грани полки

b — ширина полки
 d — толщина полки
 R — радиус внутреннего закругления
 r — радиус закругления полки



| Номер про- филя | Размеры, мм | | Площадь сечения A , см ² | Масса 1 пог. м, кг | Справочные величины для осей | | | | | | | | | | z_0 , см |
|-----------------------|-------------|--------------------------------|---|--------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------|-------------------------|--------------------------------|-------------------|------|--|--|---------------|
| | | | | | $x - x$ | | $x_0 - x_0$ | | $y_0 - y_0$ | | $x_1 - x_1$ | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | |
| b | d | I_{x_1} , см ⁴ | i_{x_1} , см | $I_{x_0}^{max}$, см ⁴ | $i_{x_0}^{max}$, см | $I_{y_0}^{min}$, см ⁴ | $i_{y_0}^{min}$, см | $I_{y_0}^{max}$, см ⁴ | $i_{y_0}^{max}$, см | I_{x_1} , см ⁴ | i_{x_1} , см | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | | |
| | | | | | 7,11 | 1,55 | 11,3 | 1,95 | 2,95 | 1,00 | 12,4 | 1,33 | | | |
| | | | | | 9,21 | 1,54 | 14,6 | 1,94 | 3,80 | 0,99 | 16,6 | 1,38 | | | |
| | | | | | 11,20 | 1,53 | 17,8 | 1,92 | 4,63 | 0,98 | 20,9 | 1,42 | | | |
| 5,0 | 50 | 3,5 | 3,86 | 3,03 | 11,60 | 1,73 | 18,4 | 2,18 | 4,80 | 1,12 | 20,3 | 1,50 | | | |
| | | | | | 13,10 | 1,73 | 20,8 | 2,18 | 5,41 | 1,11 | 23,3 | 1,52 | | | |
| | | | | | 16,00 | 1,72 | 25,4 | 2,16 | 6,59 | 1,10 | 29,2 | 1,57 | | | |
| | | | | | 18,90 | 1,95 | 29,9 | 2,45 | 7,81 | 1,25 | 33,1 | 1,69 | | | |
| 6,3 | 63 | 5,0 | 6,13 | 4,81 | 23,10 | 1,94 | 36,6 | 2,44 | 9,52 | 1,25 | 41,5 | 1,74 | | | |
| | | | | | 27,10 | 1,93 | 42,9 | 2,43 | 11,20 | 1,24 | 50,0 | 1,78 | | | |
| | | | | | 29,00 | 2,16 | 46,0 | 2,72 | 12,00 | 1,39 | 51,0 | 1,88 | | | |
| | | | | | 31,90 | 2,16 | 50,7 | 2,72 | 13,20 | 1,39 | 56,7 | 1,90 | | | |
| 7,0 | 70 | 6,0 | 8,15 | 6,39 | 37,60 | 2,15 | 59,6 | 2,71 | 15,50 | 1,38 | 68,4 | 1,94 | | | |
| | | | | | 43,00 | 2,14 | 68,2 | 2,69 | 17,80 | 1,37 | 80,1 | 1,99 | | | |

Продолжение табл. 3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|------|-----|------|-------|-------|--------|------|-------|------|--------|------|-------|------|
| | | 8,0 | 10,70 | 8,37 | 48,20 | 2,13 | 76,4 | 2,68 | 20,00 | 1,37 | 91,9 | 2,02 |
| | | 5,0 | 7,39 | 5,80 | 39,50 | 2,31 | 62,6 | 2,91 | 16,40 | 1,49 | 69,6 | 2,02 |
| | | 6,0 | 8,78 | 6,89 | 46,60 | 2,30 | 73,9 | 2,90 | 19,30 | 1,48 | 83,9 | 2,06 |
| 7,5 | 75 | 7,0 | 10,10 | 7,96 | 53,30 | 2,29 | 84,6 | 2,89 | 22,10 | 1,48 | 98,3 | 2,10 |
| | | 8,0 | 11,50 | 9,02 | 59,80 | 2,28 | 94,6 | 2,87 | 24,80 | 1,47 | 113,0 | 2,15 |
| | | 9,0 | 12,80 | 10,10 | 66,10 | 2,27 | 105,0 | 2,86 | 27,50 | 1,46 | 127,0 | 2,18 |
| | | 5,5 | 8,63 | 6,78 | 52,70 | 2,47 | 83,6 | 3,11 | 21,80 | 1,59 | 93,2 | 2,17 |
| 8,0 | 80 | 6,0 | 9,38 | 7,36 | 57,00 | 2,47 | 90,4 | 3,11 | 23,50 | 1,58 | 102,0 | 2,19 |
| | | 7,0 | 10,80 | 8,51 | 65,30 | 2,45 | 104,0 | 3,09 | 27,00 | 1,58 | 119,0 | 2,23 |
| | | 8,0 | 12,30 | 9,65 | 73,40 | 2,44 | 116,0 | 3,08 | 30,30 | 1,57 | 137,0 | 2,27 |
| | | 6,0 | 10,60 | 8,33 | 82,10 | 2,78 | 130,0 | 3,50 | 34,00 | 1,79 | 145,0 | 2,43 |
| 9,0 | 90 | 7,0 | 12,30 | 9,64 | 94,30 | 2,77 | 150,0 | 3,49 | 38,90 | 1,78 | 169,0 | 2,47 |
| | | 8,0 | 13,90 | 10,90 | 106,00 | 2,76 | 168,0 | 3,48 | 43,80 | 1,77 | 194,0 | 2,51 |
| | | 9,0 | 15,60 | 12,20 | 118,00 | 2,75 | 186,0 | 3,46 | 48,60 | 1,77 | 219,0 | 2,55 |
| | | 6,5 | 12,80 | 10,10 | 122,00 | 3,09 | 193,0 | 3,88 | 50,70 | 1,99 | 214,0 | 2,68 |
| | | 7,0 | 13,80 | 10,80 | 131,00 | 3,08 | 207,0 | 3,88 | 54,20 | 1,98 | 231,0 | 2,71 |
| | | 8,0 | 15,60 | 12,20 | 147,00 | 3,07 | 233,0 | 3,87 | 60,90 | 1,98 | 265,0 | 2,75 |
| 10,0 | 100 | 10,0 | 19,20 | 15,10 | 179,00 | 3,05 | 284,0 | 3,84 | 74,10 | 1,96 | 333,0 | 2,83 |
| | | 12,0 | 22,80 | 17,90 | 209,00 | 3,03 | 331,0 | 3,81 | 86,90 | 1,95 | 402,0 | 2,91 |
| | | 14,0 | 26,30 | 20,60 | 237,00 | 3,00 | 375,0 | 3,78 | 99,30 | 1,94 | 472,0 | 2,99 |
| | | 16,0 | 29,70 | 23,30 | 264,00 | 2,98 | 416,0 | 3,74 | 112,00 | 1,94 | 542,0 | 3,06 |
| 11,0 | 110 | 7,0 | 15,20 | 11,90 | 176,00 | 3,40 | 279,0 | 4,29 | 72,70 | 2,19 | 308,0 | 2,96 |
| | | 8,0 | 17,20 | 13,50 | 198,00 | 3,39 | 315,0 | 4,28 | 81,80 | 2,18 | 353,0 | 3,0 |

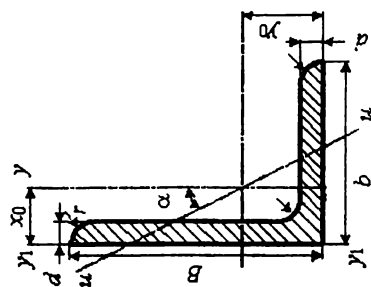
Продолжение табл. 3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|------|-----|------|-------|-------|---------|------|--------|------|--------|------|--------|------|
| 12,5 | 125 | 8,0 | 19,70 | 15,50 | 294,00 | 3,87 | 467,0 | 4,87 | 122,00 | 2,49 | 516,0 | 3,36 |
| | | 9,0 | 22,00 | 17,30 | 327,00 | 3,86 | 520,0 | 4,86 | 135,00 | 2,48 | 582,0 | 3,40 |
| | | 10,0 | 24,30 | 19,10 | 360,00 | 3,85 | 571,0 | 4,84 | 149,00 | 2,47 | 649,0 | 3,45 |
| | | 12,0 | 28,90 | 22,70 | 422,00 | 3,82 | 670,0 | 4,82 | 174,00 | 2,46 | 782,0 | 3,53 |
| | | 14,0 | 33,40 | 26,20 | 482,00 | 3,80 | 764,0 | 4,78 | 200,00 | 2,45 | 916,0 | 3,61 |
| | | 16,0 | 37,80 | 29,60 | 539,00 | 3,78 | 853,0 | 4,75 | 224,00 | 2,44 | 1051,0 | 3,68 |
| | | 9,0 | 24,70 | 19,40 | 466,00 | 4,34 | 739,0 | 5,47 | 192,00 | 2,79 | 818,0 | 3,78 |
| 14,0 | 140 | 10,0 | 27,30 | 21,50 | 512,00 | 4,33 | 814,0 | 5,46 | 211,00 | 2,78 | 911,0 | 3,82 |
| | | 12,0 | 32,50 | 25,50 | 602,00 | 4,31 | 957,0 | 5,43 | 248,00 | 2,76 | 1097,0 | 3,90 |
| | | 10,0 | 31,40 | 24,70 | 774,00 | 4,96 | 1229,0 | 6,25 | 319,00 | 3,19 | 1356,0 | 4,30 |
| | | 11,0 | 34,40 | 27,00 | 844,00 | 4,95 | 1341,0 | 6,24 | 348,00 | 3,18 | 1494,0 | 4,35 |
| 16,0 | 160 | 12,0 | 37,40 | 29,40 | 913,00 | 4,94 | 1450,0 | 6,23 | 376,00 | 3,17 | 1633,0 | 4,39 |
| | | 14,0 | 43,30 | 34,00 | 1046,00 | 4,92 | 1662,0 | 6,20 | 431,00 | 3,16 | 1911,0 | 4,47 |
| | | 16,0 | 49,10 | 38,50 | 1175,00 | 4,89 | 1866,0 | 6,17 | 485,0 | 3,14 | 2191,0 | 4,55 |
| | | 18,0 | 54,80 | 43,00 | 1299,00 | 4,87 | 2061,0 | 6,13 | 537,00 | 3,13 | 2472,0 | 4,63 |
| | | 20,0 | 60,40 | 47,40 | 1419,00 | 4,85 | 2248,0 | 6,10 | 589,00 | 3,12 | 2756,0 | 4,70 |
| | | 11,0 | 38,80 | 30,50 | 1216,00 | 5,60 | 1933,0 | 7,06 | 500,00 | 3,59 | 2128,0 | 4,85 |
| 18,0 | 180 | 12,0 | 42,20 | 33,10 | 1317,00 | 5,59 | 2093,0 | 7,04 | 540,00 | 3,58 | 2324,0 | 4,89 |
| | | 12,0 | 47,10 | 37,00 | 1823,00 | 6,22 | 2896,0 | 7,84 | 749,00 | 3,99 | 3182,0 | 5,37 |
| 20,0 | 200 | 13,0 | 50,90 | 39,90 | 1961,00 | 6,21 | 3116,0 | 7,83 | 805,00 | 3,98 | 3452,0 | 5,42 |
| | | 14,0 | 54,60 | 42,80 | 2097,00 | 6,20 | 3333,0 | 7,81 | 861,00 | 3,97 | 3722,0 | 5,46 |
| | | 16,0 | 62,00 | 48,70 | 2363,00 | 6,17 | 3755,0 | 7,78 | 970,00 | 3,96 | 4264,0 | 5,54 |

Окончание табл. 3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|------|-----|------|--------|--------|---------|------|---------|------|---------|------|---------|------|
| | | 20,0 | 76,50 | 60,10 | 2871,00 | 6,12 | 4560,0 | 7,72 | 1182,00 | 3,93 | 5355,0 | 5,70 |
| | | 25,0 | 94,30 | 74,00 | 3466,00 | 6,06 | 5494,0 | 7,63 | 1438,00 | 3,91 | 6733,0 | 5,89 |
| | | 30,0 | 111,50 | 87,60 | 4020,00 | 6,00 | 6351,0 | 7,55 | 1688,00 | 3,89 | 8130,0 | 6,07 |
| 22,0 | 220 | 14,0 | 60,40 | 47,40 | 2814,00 | 6,83 | 4470,0 | 8,60 | 1159,00 | 4,38 | 4941,0 | 5,93 |
| | | 16,0 | 68,60 | 53,80 | 3175,00 | 6,81 | 5045,0 | 8,58 | 1306,00 | 4,36 | 5661,0 | 6,02 |
| | | 16,0 | 78,40 | 61,50 | 4717,00 | 7,76 | 7492,0 | 9,78 | 1942,00 | 4,98 | 8286,0 | 6,75 |
| | | 18,0 | 87,70 | 68,90 | 5247,00 | 7,73 | 8337,0 | 9,75 | 2158,00 | 4,96 | 9342,0 | 6,83 |
| | | 20,0 | 97,00 | 76,10 | 5765,00 | 7,71 | 9160,0 | 9,72 | 2370,00 | 4,94 | 10401,0 | 6,91 |
| | | 22,0 | 106,10 | 83,30 | 6270,00 | 7,69 | 9961,0 | 9,69 | 2579,00 | 4,93 | 1146,0 | 7,00 |
| | | 25,0 | 119,70 | 94,00 | 7006,00 | 7,65 | 11125,0 | 9,64 | 2887,00 | 4,91 | 13064,0 | 7,11 |
| | | 28,0 | 133,10 | 104,50 | 7717,00 | 7,61 | 12244,0 | 9,59 | 3190,00 | 4,89 | 14674,0 | 7,23 |
| 25,0 | 250 | 30,0 | 142,00 | 111,40 | 8177,00 | 7,59 | 12965,0 | 9,56 | 3389,00 | 4,89 | 15753,0 | 7,31 |

Сталь прокатная угловая неравнополочная (ГОСТ 8510 – 72)



B – ширина большой полки

b – ширина малой полки

d – толщина полки

R – радиус внутреннего закругления

r – радиус закругления полки

I – момент инерции

i – радиус инерции

 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок
 α – угол наклона главной центральной оси

| Номер профиля | Размеры, мм | | | Пло- щадь про- филя A , см^2 | Масса 1 пог.м, кг | Справочные величины для осей | | | | | | | | | | |
|------------------|-------------|-----|-----|---|-------------------------|------------------------------|------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|---------------|---|---------------|--|-----------------------------|------------------------------|
| | B | b | d | | | $x-x$ | | $y-y$ | | x_1-x_1 | | y_1-y_1 | | $u-u$ | | |
| | | | | | | I_{xx} , см^4 | i_{x0} , см | I_{yy} , см^4 | i_{y0} , см | I_{x1} , см^4 | y_0 , см | $I_{y1 \text{ min}}$, см^4 | x_0 , см | $J_{u \text{ min}}$, см^4 | $i_{u \text{ min}}$, см | $\text{tg } \alpha$, рад |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 6,3/4,0 | 63 | 40 | 4,0 | 4,04 | 3,17 | 16,3 | 2,01 | 5,16 | 1,13 | 33,0 | 2,03 | 8,51 | 0,91 | 3,07 | 0,87 | 0,397 |
| | | | 5,0 | 4,98 | 3,91 | 19,9 | 2,00 | 6,26 | 1,12 | 41,4 | 2,08 | 10,80 | 0,95 | 3,72 | 0,86 | 0,396 |
| | | | 6,0 | 5,90 | 4,63 | 23,3 | 1,99 | 7,28 | 1,11 | 49,9 | 2,12 | 13,10 | 0,99 | 4,36 | 0,86 | 0,393 |
| | | | 8,0 | 7,68 | 6,03 | 29,6 | 1,96 | 9,15 | 1,09 | 66,9 | 2,20 | 17,90 | 1,07 | 5,58 | 0,85 | 0,386 |
| 7,0/4,5 | 70 | 45 | 4,5 | 5,07 | 3,98 | 25,3 | 2,23 | 8,25 | 1,28 | 51,0 | 2,25 | 13,6 | 1,03 | 4,88 | 0,98 | 0,407 |
| | | | 5,0 | 5,59 | 4,39 | 27,8 | 2,23 | 9,05 | 1,27 | 56,7 | 2,28 | 15,2 | 1,05 | 5,34 | 0,98 | 0,406 |

Продолжение табл. 4

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|-----------|-----|-----|------|-------|-------|--------|------|--------|------|--------|------|-------|------|--------|------|-------|
| 7,5/5,0 | 75 | 50 | 5,0 | 6,11 | 4,79 | 34,8 | 2,39 | 12,50 | 1,43 | 69,7 | 2,39 | 20,8 | 1,17 | 7,24 | 1,09 | 0,436 |
| | | | 6,0 | 7,25 | 5,69 | 40,9 | 2,38 | 14,60 | 1,42 | 83,9 | 2,44 | 25,2 | 1,21 | 8,48 | 1,08 | 0,435 |
| | | | 8,0 | 9,47 | 7,43 | 52,4 | 2,35 | 18,50 | 1,40 | 112,0 | 2,52 | 34,2 | 1,29 | 10,90 | 1,07 | 0,430 |
| 8,0/5,0 | 80 | 50 | 5,0 | 6,36 | 4,99 | 41,6 | 2,56 | 12,70 | 1,41 | 84,6 | 2,60 | 20,8 | 1,13 | 7,58 | 1,09 | 0,387 |
| | | | 6,0 | 7,55 | 5,92 | 49,0 | 2,55 | 14,80 | 1,40 | 102,0 | 2,65 | 25,2 | 1,17 | 8,88 | 1,08 | 0,386 |
| | | | 5,5 | 7,86 | 6,17 | 65,3 | 2,88 | 19,70 | 1,58 | 132,0 | 2,92 | 32,2 | 1,26 | 11,80 | 1,22 | 0,384 |
| 9,0/5,6 | 90 | 56 | 6,0 | 8,54 | 6,70 | 70,6 | 2,88 | 21,20 | 1,58 | 145,0 | 2,95 | 35,2 | 1,28 | 12,70 | 1,2 | 0,384 |
| | | | 8,0 | 11,18 | 8,77 | 90,9 | 2,85 | 27,10 | 1,56 | 194,0 | 3,04 | 47,8 | 1,36 | 16,30 | 1,21 | 0,380 |
| | | | 6,0 | 9,59 | 7,53 | 98,3 | 3,20 | 30,60 | 1,79 | 198,0 | 3,23 | 49,9 | 1,42 | 18,20 | 1,38 | 0,393 |
| 10,0/6,3 | 100 | 63 | 7,0 | 11,10 | 8,70 | 113,0 | 3,19 | 35,00 | 1,78 | 232,0 | 3,28 | 58,7 | 1,46 | 20,80 | 1,37 | 0,392 |
| | | | 8,0 | 12,60 | 9,87 | 127,0 | 3,18 | 39,20 | 1,77 | 266,0 | 3,32 | 67,6 | 1,50 | 23,40 | 1,36 | 0,391 |
| | | | 10,0 | 15,50 | 12,10 | 154,0 | 3,15 | 47,10 | 1,75 | 333,0 | 3,40 | 85,8 | 1,58 | 28,30 | 1,35 | 0,387 |
| 11,0/7,0 | 110 | 70 | 6,5 | 11,40 | 8,98 | 142,0 | 3,53 | 45,60 | 2,0 | 286,0 | 3,55 | 74,3 | 1,58 | 26,90 | 1,53 | 0,402 |
| | | | 7,0 | 12,30 | 9,64 | 152,0 | 3,52 | 48,70 | 1,99 | 309,0 | 3,57 | 80,3 | 1,60 | 28,80 | 1,53 | 0,402 |
| | | | 8,0 | 13,90 | 10,90 | 172,0 | 3,51 | 54,60 | 1,98 | 353,0 | 3,61 | 92,3 | 1,64 | 32,30 | 1,52 | 0,400 |
| 12,5/8,0 | 125 | 80 | 7,0 | 14,10 | 11,00 | 227,0 | 4,01 | 73,70 | 2,29 | 452,0 | 4,01 | 119,0 | 1,80 | 43,40 | 1,76 | 0,407 |
| | | | 8,0 | 16,00 | 12,50 | 256,0 | 4,00 | 83,00 | 2,28 | 518,0 | 4,05 | 137,0 | 1,84 | 48,80 | 1,75 | 0,406 |
| | | | 10,0 | 19,70 | 15,50 | 312,0 | 3,98 | 100,00 | 2,26 | 649,0 | 4,14 | 173,0 | 1,92 | 59,30 | 1,74 | 0,404 |
| 14,0/9,0 | 140 | 90 | 12,0 | 23,40 | 18,30 | 365,0 | 3,95 | 117,00 | 2,24 | 781,0 | 4,22 | 210,0 | 2,00 | 69,50 | 1,72 | 0,400 |
| | | | 8,0 | 18,00 | 14,10 | 364,0 | 4,49 | 120,00 | 2,58 | 727,0 | 4,49 | 194,0 | 2,03 | 70,30 | 1,98 | 0,411 |
| | | | 10,0 | 22,20 | 17,50 | 444,0 | 4,47 | 146,00 | 2,56 | 911,0 | 4,58 | 245,0 | 2,12 | 85,50 | 1,96 | 0,409 |
| 16,0/10,0 | 160 | 100 | 9,0 | 22,90 | 18,00 | 606,0 | 5,15 | 186,00 | 2,85 | 1221,0 | 5,19 | 330,0 | 2,23 | 110,00 | 2,20 | 0,391 |
| | | | 10,0 | 25,30 | 19,80 | 670,0 | 5,13 | 204,00 | 2,84 | 1354,0 | 5,23 | 335,0 | 2,28 | 121,00 | 2,19 | 0,390 |
| | | | 12,0 | 30,00 | 23,60 | 784,0 | 5,11 | 239,00 | 2,82 | 1634,0 | 5,32 | 405,0 | 2,36 | 142,00 | 2,18 | 0,388 |
| 18,0/11,0 | 180 | 110 | 14,0 | 34,70 | 27,30 | 897,0 | 5,08 | 272,00 | 2,80 | 1910,0 | 5,40 | 477,0 | 2,43 | 162,00 | 2,16 | 0,385 |
| | | | 10,0 | 28,30 | 22,20 | 932,0 | 5,80 | 276,00 | 3,12 | 1933,0 | 5,88 | 444,0 | 2,44 | 165,00 | 2,42 | 0,375 |
| | | | 12,0 | 33,70 | 26,40 | 1123,0 | 5,77 | 324,00 | 3,10 | 2324,0 | 5,97 | 537,0 | 2,52 | 194,00 | 2,40 | 0,374 |

Окончание табл. 4

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|-----------|-----|-----|------|-------|-------|--------|------|---------|------|---------|------|--------|------|--------|------|-------|
| 20,0/12,5 | 200 | 125 | 11,0 | 34,90 | 27,40 | 1449,0 | 6,45 | 446,00 | 3,58 | 2920,0 | 6,50 | 718,0 | 2,79 | 264,00 | 2,75 | 0,392 |
| | | | 12,0 | 37,90 | 29,70 | 1568,0 | 6,43 | 482,00 | 3,57 | 3189,0 | 6,54 | 786,0 | 2,83 | 285,00 | 2,74 | 0,392 |
| | | | 14,0 | 43,90 | 34,40 | 1801,0 | 6,41 | 551,00 | 3,54 | 3726,0 | 6,62 | 922,0 | 2,91 | 327,00 | 2,73 | 0,390 |
| | | | 16,0 | 49,80 | 39,10 | 2026,0 | 6,38 | 617,00 | 3,52 | 4264,0 | 6,71 | 1061,0 | 2,99 | 367,00 | 2,72 | 0,388 |
| 25,0/16,0 | 250 | 160 | 12,0 | 48,30 | 37,90 | 31,47 | 8,07 | 1032,00 | 4,62 | 6212,0 | 7,97 | 1634,0 | 3,53 | 604,00 | 3,54 | 0,410 |
| | | | 16,0 | 63,60 | 49,90 | 4091,0 | 8,02 | 1333,00 | 4,58 | 8308,0 | 8,14 | 2200,0 | 3,69 | 781,00 | 3,50 | 0,408 |
| | | | 18,0 | 71,10 | 55,80 | 4545,0 | 7,99 | 1475,00 | 4,56 | 9358,0 | 8,23 | 2487,0 | 3,77 | 866,00 | 3,49 | 0,407 |
| | | | 20,0 | 78,50 | 61,70 | 4987,0 | 7,97 | 1613,00 | 4,53 | 10410,0 | 8,31 | 2776,0 | 3,85 | 949,00 | 3,48 | 0,405 |

Учебное издание

Наседкина Зинаида Афанасьевна

Песков Александр Владимирович

Шитиков Александр Васильевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор Т.А. Кузьминых

Печатается по постановлению

редакционно-издательского совета университета

Отпечатано в ООО "ТРИКС"

Свердловская обл., г. Верхняя Пышма, ул. Феофанова, 4.

Подписано в печать 09.12.08. Формат 60х84/16. Бумага для множ. аппаратов.

Печать плоская. Усл.печ.л. 6,1. Уч.-изд.л. 6,5. Тираж 300 экз. Заказ № 46

Издательство ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет». Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11

